Trigonometrie I

Berechnung rechtwinkliger Dreiecke
mit dem Sinus

Trigonometrie II

Berechnung rechtwinkliger Dreiecke
mit Cosinus, Tangens und Cotangens

Trigonometrie III

Definition der Sinus- und
Cosinusfunktion am Einheitskreis

Externe Links:

Interaktiver Trigonometrie-Lehrgang: Online-Version Download (2MB ZIP)

Animation: Sinus/Cosinus/Tangens (von Walter Fendt). Schöne Animation, die die Definitionen verdeutlicht.
Interaktiver Test: Die Graphen von Winkelfunktionen (Uni Wien) Anmerkung: Man muß auf der Seite nach unten fahren (Test 3).
Interaktiver-Trigonometrie-Lehrgang (Dr.Norbert Steffen). Ein teilweise interaktiver Trigonometrie-Lehrgang
Die Graphen der Winkelfunktionen (Uni Wien). Nur ein paar Bilder zu den Winkelfunktionen (sin, ... , acot).

Animation: Beweis des Sinussatzes (IES - z.Zt. nur in Englisch)
Animation: Beweis des Cosinussatzes (1) (IES - z.Zt. nur in Englisch)
Animation: Beweis des Cosinussatzes (2) (IES - z.Zt. nur in Englisch)

Trigonometrie IV

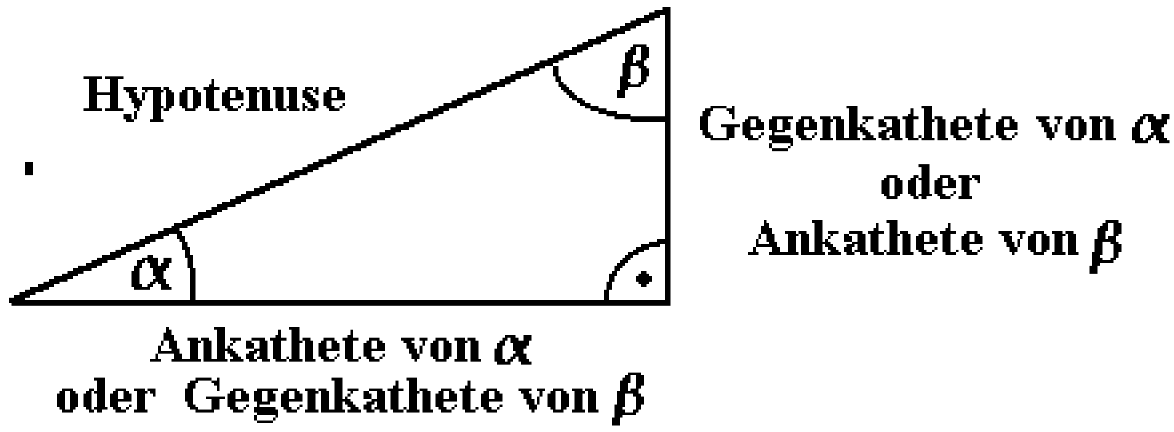
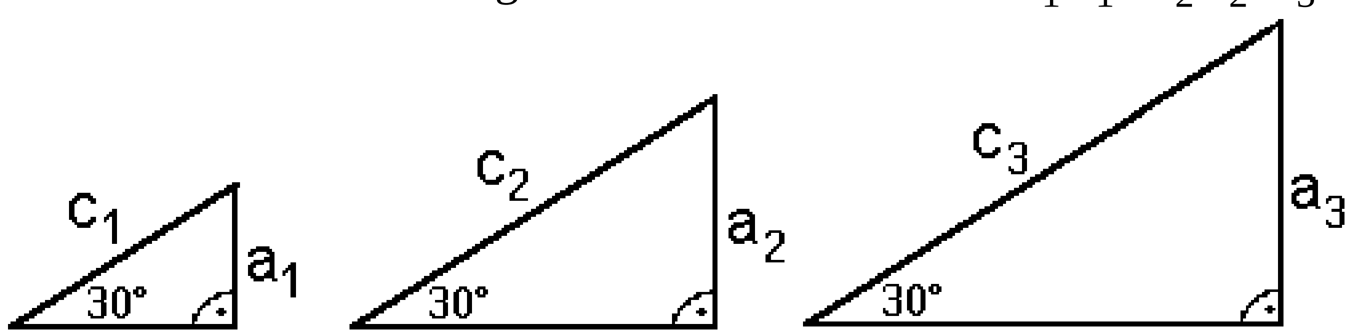
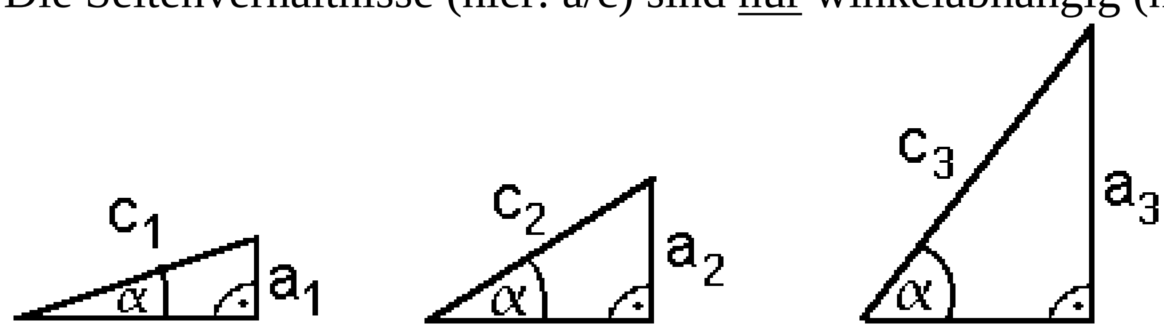
Tangensfunktion und Cotangensfunktion

Trigonometrie V

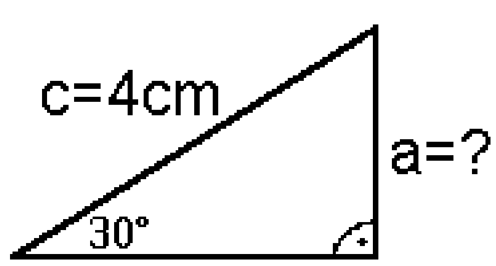
Trigonometrischer Pythagoras, die Berechnung beliebiger Dreiecke

Trigonometrie VI-VII

Themen: Bogenmaß, parametrisierte Sinusfunktion und Goniometrie, Additionstheoreme

Version: 1.1 ©Raddy '99	# Inhalt zu: **Trigonometrie I** ZURÜCK
Info-Seite	Vorkenntnisse: ... Themen: ... Infos: www.mathematik.net
Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck	
Satz des Pythagoras	Im rechtwinkligen Dreieck gilt: $a^2 + b^2 = c^2$ (wenn c die Hypotenuse ist) Anwendung: Sind zwei Seiten bekannt, so kann man die dritte berechnen.
Winkelsumme	Winkelsummensatz: Die Summe der Innenwinkel im Dreieck ist 180°.
Ähnliche Dreiecke	Sind zwei Dreiecke in allen drei Winkeln gleich, so nennt man sie ähnlich. Wegen dem Winkelsummensatz genügen auch schon zwei Winkel.
Was ist ein Seitenverhältnis	In jedem Dreieck gibt es 6 Seitenverhältnisse. Ist das Dreieck rechtwinklig, so haben sie Namen wie z.B.: Gegenkathete von α / Hypotenuse
Bei ähnlichen Dreiecken gilt: Seitenverhältnis von der Größe des Dreiecks unabhängig.	Ähnliche Dreiecke haben gleiche Seitenverhältnisse: $a_1/c_1= a_2/c_2=a_3/c_3$ 
Die Seiten-verhältnisse im Dreieck sind winkelabhängig	Die Seitenverhältnisse (hier: a/c) sind nur winkelabhängig (hier: von α):  Das Seitenverhältnis a/c (Gegenkathete von α/Hypotenuse) heißt Sinus α.
Tabellen für die Seitenverhältnisse: Die Sinustabelle	Die Mathematiker merken sich das "winkelabhängige" Seitenverhältnis "Gegenkathete von α / Hypotenuse" in einer sogenannten Sinustabelle:

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$	0	0.17	0.34	0.50	0.64	0.77	0.87	0.94	0.98	1

1.Anwendung der Sinustabelle: Seitenberechnung	Mit der Sinus-Tabelle kann man alle Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks berechenen, auch wenn nur eine Seite bekannt ist (und die Winkel):  Beispiel: $\frac{a}{c} = \sin 30°$ $\frac{a}{4cm} = 0{,}5$ $a = 0{,}5 \cdot 4cm$
Variante	Eine kleine Variante dieser Aufgabe: Die Hypotenuse ist gesucht.
2.Anwendung der Sinustabelle:	Umgekehrt kann man mit der Sinustabelle auch die Winkel berechnen, wenn zwei der drei Seiten bekannt sind. Ein Beispiel ...

Trigonometrie I

ZURÜCK

Info-Seite

■ Notwendige Vorkenntnisse

Es sind nur allereinfachste Kenntnisse im Formelumstellen nötig, und selbst hier wird behutsam vorgegangen.

Notwendige Kenntnisse der Elementar-Geometrie (Pythagoras, Winkelsumme im Dreieck) werden wiederholt, allerdings nicht so umfassend wie in der Schule dargestellt.

■ Was wird in diesem Kapitel gelernt

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns einzig und allein damit, den Begriff des "Sinus eines Winkels" zu erklären.

Dazu werden zunächst einige Kenntnisse der Elementar-geometrie wiederholt, z.B. Winkelsummensatz, Satz des Pythagoras

Version: 1.1 ©Raddy '99	# Trigonometrie I ZURÜCK

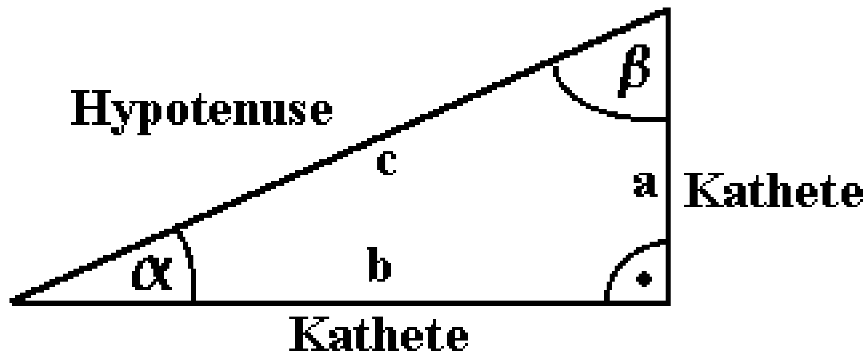
Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck

■ Die Hypotenuse und die Katheten

❶ Die längste Seite im rechwinkligen Dreieck liegt dem rechten Winkel gegenüber und wird Hypotenuse genannt.
❷ Die beiden übrigen Seiten werden Katheten genannt.

■ Beispiel

Gegeben sei das folgende Dreieck:



Dann ist die Seite c die Hypotenuse, weil sie dem rechten Winkel gegenüberliegt. Die beiden übrigen Seiten nennt man Katheten. Im Beispiel sind dies die Seiten a und b.

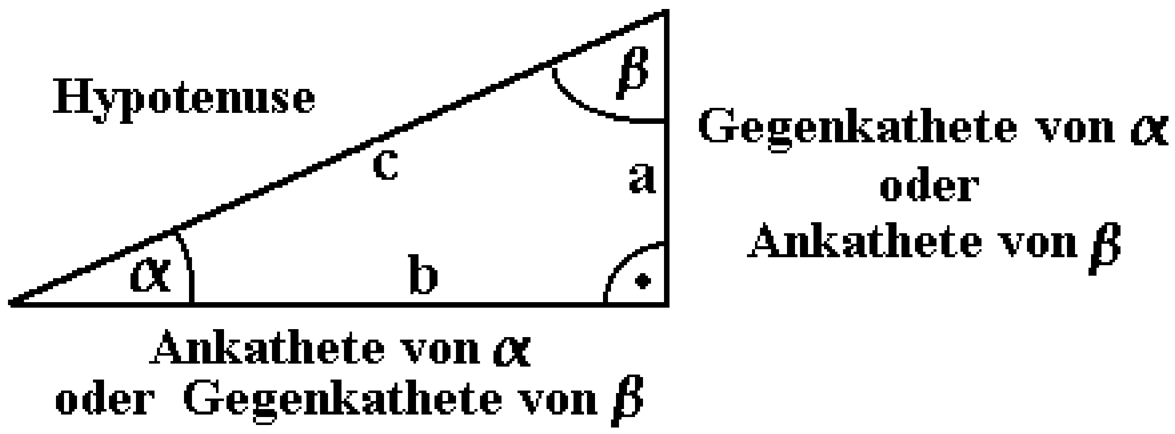
■ Gegenkathete und Ankathete

Die Katheten werden nochmals unterschieden:

❶ Die Kathete, die dem Winkel α gegenüber liegt, nennt man die Gegenkathete von α.
❷ Die Kathete, die am Winkel α anliegt, nennt man die Ankathete von α.

■ Beispiel

Gegeben sei wieder das gleiche Dreieck wie oben:



Zuerst betrachten wir die Seite a:
Da die Seite a dem Winkel α gegenüberliegt, ist die Seite a die Gegenkathete des Winkels α. Das die Seite a aber auch am Winkel β anliegt, ist sie gleichzeitig die Ankathete von β.

Nun zur Seite b:
Da die Seite b dem Winkel β gegenüberliegt, ist die Seite b die Gegenkathete des Winkels β. Das die Seite b aber auch am Winkel α anliegt, ist sie gleichzeitig die Ankathete von α.

Version: 1.1
©Raddy '99

Trigonometrie I

ZURÜCK

Satz des Pythagoras

■ Anwendunggebiet des Satzes

Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck zwei Seiten bekannt sind, kann mit dem "Satz des Phytagoras" die dritte Seite berechnet werden.

■ Satz des Pythagoras

Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich der Summe des Hypotenusenquadrates. Oder kurz:

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$$ (a,b = Katheten c=Hypotenuse)

■ Beispiel

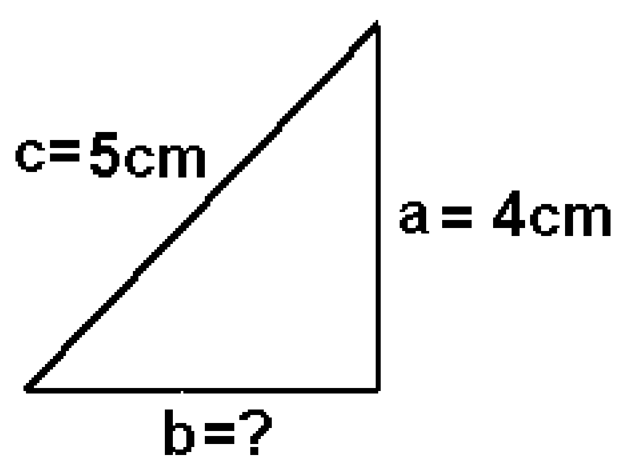
Gegeben seien im unten gezeichneten Dreieck die Seiten a und c:

a=4cm
c=5cm

Gesucht ist die Länge der Seite b:

b= ?

Bild:



Wir rechnen:

$c^2 = a^2 + b^2$	umstellen nach b^2
$b^2 = c^2 - a^2$	Quadratwurzel ziehen
$b = \sqrt{c^2 - a^2}$	Werte einzetzen
$b = \sqrt{(5cm)^2 - (4cm)^2}$	Summanden quadrieren
$b = \sqrt{25cm^2 - 16cm^2}$	subtrahieren
$b = \sqrt{9cm^2} = \underline{\underline{3cm}}$	

Version: 1.1
©Raddy '99

Trigonometrie I

ZURÜCK

Winkelsumme der Innenwinkel eines Dreiecks

■ Vorbemerkung

Der folgende Satz müßte schon aus der Schulmathematik bekannt sein, wird aber zur Vorbereitung auf die Winkelfunktionen nochmals wiederholt:

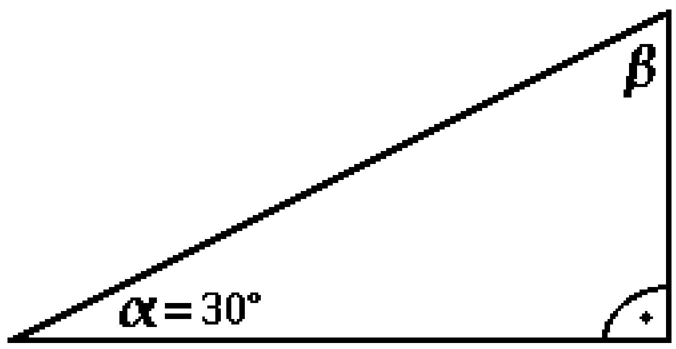
■ Satz

Im Dreieck ist die Summe der Innenwinkel gleich 180°.

■ Anwendung des Satzes

Eine Anwendung des Satzes ist, daß man bei zwei gegebenen Winkeln den dritten fehlenden Winkel berechnen kann. Beispiel:

Gegeben sei das folgende Dreieck, von dem 2 Winkel bekannt sind:



Nun kann der dritten (unbekannte) Winkel mit oben genannten Satz berechnet werden:

$\beta + 30° + 90° = 180°$
$\beta = 180° - 90° - 30°$
$\beta = 60°$
=====

■ Folgerung des Satzes

Wenn also nächstens gesagt wird, daß von einem Dreieck zwei Winkel bekannt sind, so ist dies gleichbedeutend damit, daß alle Winkel des Dreiecks bekannt sind.

Trigonometrie I

ZURÜCK

Ähnlichkeit bei Dreiecken

■ Vorbemerkung

Auch die folgende Definition entstammt der Schulmathematik, und müßte bekannt sein. Die Definition beschreibt, was man bei Dreiecken unter dem Begriff "Ähnlichkeit" versteht.

■ Definition

> Stimmen zwei Dreiecke in allen drei Winkeln überein,
> so nennt man die beiden Dreiecke zueinander "ähnlich".

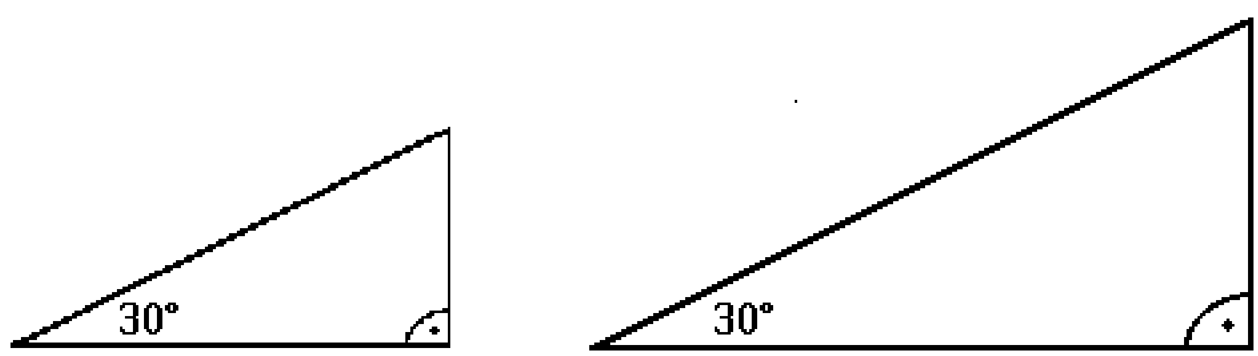
■ Folgerung

Auf der Vorseite haben wir gesagt, daß durch zwei bekannte Winkel eines Dreiecks auch der dritte Winkel bestimmt ist. Deshalb gilt die folgende Folgerung aus der Definition:

> Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so stimmen
> sie auch im dritten Winkel überein, und sind somit ähnlich.

■ Beispiel

Das folgende Bild zeigt zwei Dreiecke die ähnlich sich, weil sie in zwei Winkeln (30°/90°) und somit in allen Winkeln gleich sind:



Trigonometrie I

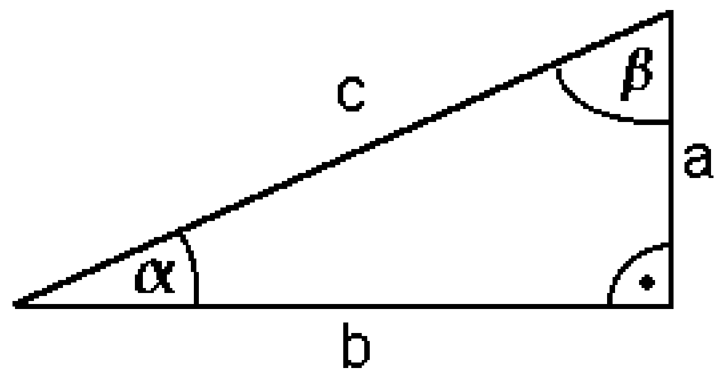
ZURÜCK

Was ist ein Seitenverhältnis

In einem Dreieck (Viereck, Fünfeck, ...) kann man zwei Seiten ins Verhältnis setzten. Das heißt nichts anderes, als daß man die beiden Seiten dividiert. Beispiel:

Beispiel

Gegeben sei folgendes Dreieck:



Dann kann man folgende sechs Seitenverhältnisse bilden:

❶ $\frac{a}{c}$ ❷ $\frac{b}{c}$ ❸ $\frac{a}{b}$ ❹ $\frac{b}{a}$ ❺ $\frac{c}{a}$ ❻ $\frac{c}{b}$

Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck

Wir haben jedoch gelernt, daß die Seiten im rechtwinkligen Dreieck besondere Namen haben: Hypotenuse, Ankathete und Gegenkathete.

Deshalb bezeichnet man z.B. das Verhältnis a/c stattdessen mit

Gegenkathete von α / Hypotenuse oder mit
Ankathete von β / Hypotenuse

Übung

Gegeben sei das Dreieck oben. Dazu zwei Übungen: Es soll das Verhältnisse b/c und das Verhältnis a/b gebildet werden:

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Gegenkathete von } \beta}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{\text{Ankathete von } \beta}{\text{Gegenkathete von } \beta}$$

Dazu noch eine Anmerkung. Das Verhältnis a/b hätte man auch auf folgende Weise ausdrücken können:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{Ankathete von } \beta}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Gegenkathete von } \beta}$$

Dies wäre zwar richtig, aber es ist absolut unüblich.

Version: 1.1
©Raddy '99

Trigonometrie I

ZURÜCK

Seitenverhältnis bei ähnlichen Dreiecken

■ Vorbemerkung

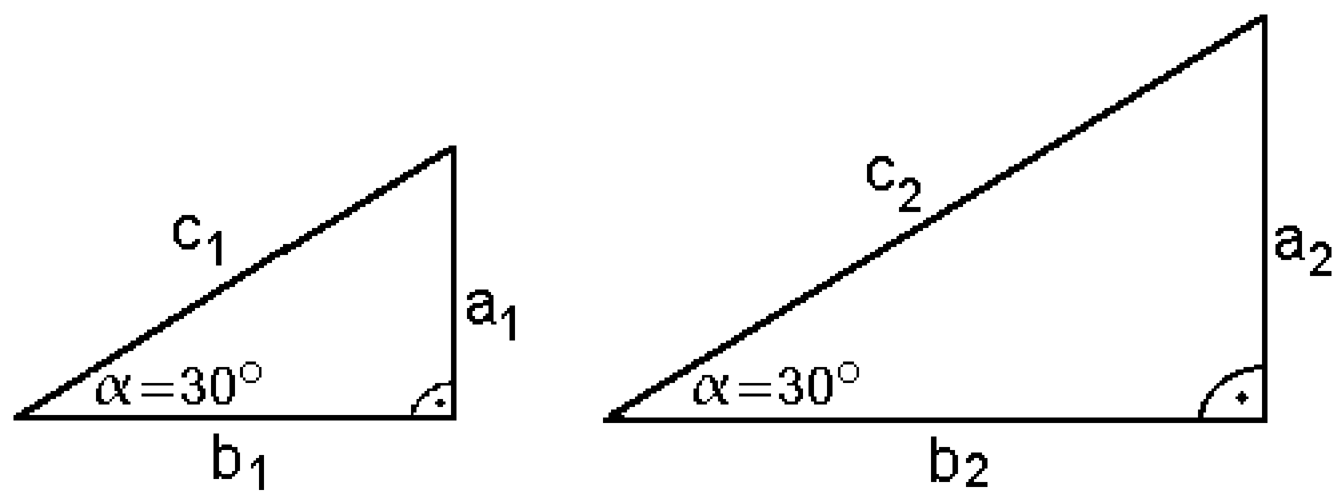
Auf der Vorseite haben wir "ähnliche" Dreiecke" kennengelernt.
Ähnliche Dreiecke haben eine wichtige Eigenschaft:

■ Satz

Zwei "ähnliche Dreiecke" haben gleiche Seitenverhältnisse.

■ Erklärung des Satzes

Zuerst zeichnen wir zwei ähnliche Dreiecke, also zwei Dreiecke mit gleichen Winkeln. Im Beispiel zeichen wir zwei 30°/90°/60° Dreiecke:



Exemplarisch überprüfen wir eines der sechs möglichen Seitenverhältnisse, z.B. das Verhältnis Gegenkathete α / Hypotenuse. Im Beispiel entspricht dies dem Verhältnis a/c:

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{2cm}{4cm} = 0.5$$

$$\frac{a_2}{c_2} = \frac{3.1cm}{6.2cm} = 0.5$$

<u>Man sieht</u>: Bei den beiden zueinander ähnlichen Dreiecken ist das Seitenverhältnis "Gegenkathete α / Hypotenuse" konstant.

Der Satz sagt weiter, daß auch die anderen Seitenverhältnisse konstant sind:

Ankathete von α / Hypotenuse	(im Bild: b/c)
Gegenkathete von α / Ankathete von α	(im Bild: a/b)
Ankathete von α / Gegenkathete von α	(im Bild: b/a)

Aus Platzmangel verzichten wir jedoch darauf, dies zu demonstrieren.
Als Übung kann man aber mit einem Lineal nachmessen.

Version: 1.1

Trigonometrie I

ZURÜCK

Die Seitenverhältnisse sind winkelabhängig

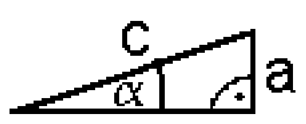
Vorbemerkung

Auf der Vorseite haben wir gesehen, daß die Seitenverhältnisse nicht von der Größe des Dreiecks abhängig sind, d.h. ähnliche Dreiecke haben gleiche Seitenverhältnisse.

Auf diese Seite lernen wir, daß die Seitenverhältnisse nur von den Winkeln des Dreiecks abhängen.

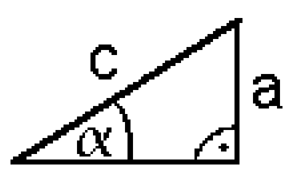
Veranschaulichung der Winkelabhängigkeit

Zuerst zeichnen wir ein rechtwinkliges Dreieck:



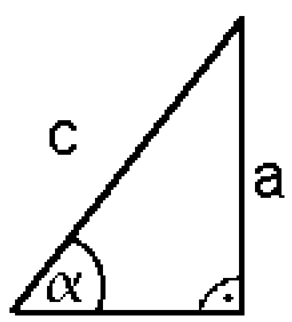
$$\frac{a}{c} \approx \frac{6mm}{20mm} = 0.3$$

Nun vergrößern wir den Winkel α. Das Verhältnis a/c, d.h. das Verhältnis "Gegenkathete von α / Hypotenuse" wird größer:



$$\frac{a}{c} \approx \frac{10mm}{20mm} = 0.5$$

Jetzt vergrößern wir den Winkel α nochmals. Das Verhältnis "Gegenkathete von α / Hypotenuse" wir nochmals größer:



$$\frac{a}{c} \approx \frac{24mm}{30mm} = 0.8$$

Wir sehen: Das Seiten-Verhältnis a/c , also das Verhältnis "Gegenkathete von α / Hypotenuse", hängt nur vom Winkel α ab, und nicht von der Größe des Dreiecks.

Der Begriff "Sinus"

Das Seitenverhältnis "Gegenkathete von α / Hypotenuse" hat nun einen besonderen Namen. Man nennt das Verhältnis Sinus α. Dazu mehr auf den folgenden Seiten.

Verständnisfrage

Nehmen wir an, wir lassen (im Bild oben) den Winkel α sehr klein werden (z.B. 2°). Wird dann der Sinus α sehr groß oder sehr klein?

<u>Antwort</u>: Wenn α klein wird, dann wird die Seite a sehr klein, damit auch das Verhältnis a/c, und somit auch der Sinus α.

Trigonometrie I

ZURÜCK

Sinus-Tabelle

Vorbemerkung

Auf der Vorseite haben wir gesehen, daß das Seitenverhältnis Sinus α (Gegenkathete von α / Hypotenuse) vom Winkel α abhängt. Genauer gesagt: Zu jedem Seitenverhältnis "Sinus α" gehört genau ein Winkel α und umgekehrt: Zu jedem Winkel α gehört genau ein Seitenverhältnis "Sinus α".

Formal gesagt: Das Seitenverhältnis "Sinus α" und der Winkel α (mit: $0° < \alpha < 90°$) bilden eine bijektive Funktion.

Die Mathematiker merken sich nun in einer Tabelle, zu welchen welchem Winkel welches Seitenverhältnis gehört.

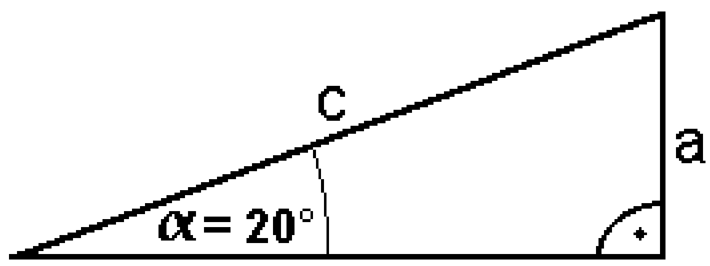
Die Sinus-Tabelle

Das folgende Bild zeigt eine Sinus-Tabelle:

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$	0	0.17	0.34	0.50	0.64	0.77	0.87	0.94	0.98	1

Nun wollen wir zeigen, wie solch eine Sinus-Tabelle entsteht. Exemplarisch zeigen wir, wie der Sinus von 20° ermittelt wird:

1. Man zeichnet ein rechwinkliges Dreieck, mit einem 20° Winkel:



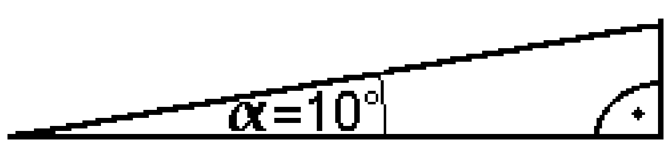
2. Nun mißt man die Seiten a und c:
   a= 19mm **c=56mm**

3. Man teilt die Seite a durch die Seite c, also die Gegenkathete von α durch die Hypotenuse, und erhält den Sinus von 20°:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{19\text{mm}}{56\text{mm}} = \underline{\underline{0.34}}$$

Übung

Man ermittle am folgenden 10°/90°/80° Dreieck den Sinus von 10°:



Lösung: Die Gegenkathete von α beträgt 9mm, die Hypotenuse beträgt 53mm. Der Sinus α beträgt 9mm/53mm = 0.17

Version: 1.1
©Raddy '99

Trigonometrie I

ZURÜCK

1.Anwendung der Sinustabelle: Seitenberechnung

■ Worum geht's

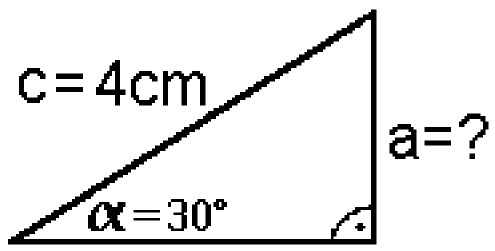
Auf der vorigen Seite haben wir in einer Tabelle zu einigen Winkeln α den dazugehörigen Sinus α angegeben, also das Verhältnis Gegenkathete von α zur Hypotenuse.

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$	0	0.17	0.34	0.50	0.64	0.77	0.87	0.94	0.98	1

Nun wollen wir zeigen, wozu man diese Tabelle gebrauchen kann. Wir werden auf den nächsten Seiten zeigen, daß man mit einer Sinustabelle die Seiten eines <u>rechtwinkligen</u> Dreiecks berechnen kann, auch wenn nur <u>eine</u> Seite des Dreiecks und <u>einer</u> der beiden spitzen Winkel bekannt ist (Spitzer Winkel = Ein Winkel kleiner als 90°).

■ Seitenberechung am rechtwinkligen Dreieck

Als Einführung wollen wir mit Hilfe der Sinus-Tabelle die Seite a im folgenden rechtwinkligen Dreieck berechnen, in dem die Seite c und der Winkel α bekannt sind:



Man bildet dazu den Sinus α, also das Seitenverhältnis Gegenkathete von α zur Hypotenuse:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

Diese Formel stellt man nach der unbekannten Seite a um, und setzt die gegebenen Werte ein (wobei sin30° durch die Tabelle gegeben ist).

$$a = \sin\alpha \cdot c = \sin 30° \cdot 4\text{cm} = 0.5 \cdot 4\text{cm} = 2\text{cm}$$

<u>Lösung</u>: Die Seite a ist somit 2cm lang.

■ Anmerkung: Pythagoras contra Sinustabelle

Wir haben soeben mit der Sinustabelle zur Seitenberechnung benutzt. In diesem Zusammenhang erinnern wir uns, daß man auch mit dem Satz des Pythagoras die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen kann.
Beim Satz des Pythagoras müssen aber <u>zwei</u> Seiten bekannt sein, um die dritte zu berechnen. Andererseits hat der Satz des Pythagoras den Vorteil, daß keiner der spitzen Winkel bekannt sein muß.

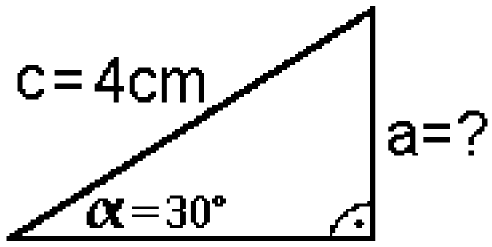
Weitere Aufgaben am Ende von "Trigonometrie II"

Version: 1.1 ©Raddy '99	# Trigonometrie I ZURÜCK

Variante

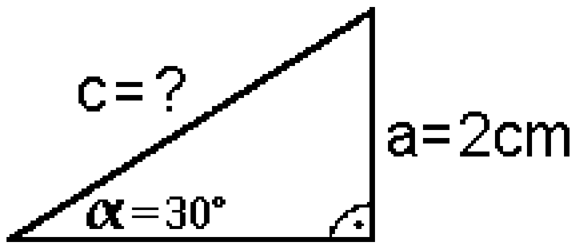
■ Rückblick auf die Vorseite

Auf der Vorseite haben wir die Gegenkathete von α (Seite a) berechnet, wobei die Hypotenuse (Seite c) und der Winkel α bekannt waren:



■ Die Variante

Eine kleine Variante zu dieser Aufgabe ist die folgende:
Gegeben sind der Winkel α und die Gegenkathete des Winkels α. (Seite a). Gesucht ist die Hypotenuse (Seite c):



■ Die Rechnung

Wir bilden wieder den Sinus α, also das Seitenverhältnis der Gegenkathete von α zur Hypotenuse:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

Diese Formel stellt man nach der unbekannten Seite c um:

$$\sin\alpha \cdot c = a$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}$$

Jetzt setzt man die Werte ein, und erhält die Lösung:

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{2\text{cm}}{0.5}$$

$$\underline{\underline{c = 4\text{cm}}}$$

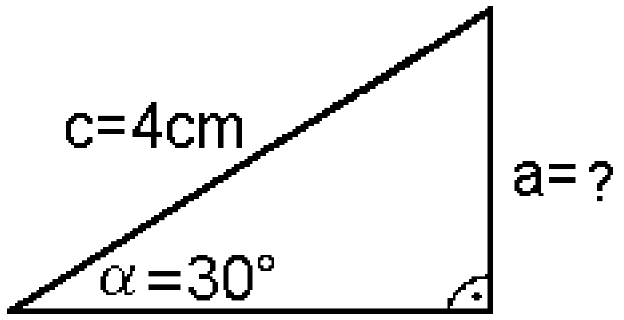
Trigonometrie I

ZURÜCK

2.Anwendung der Sinustabelle: Winkelberechnung

■ Rückblick

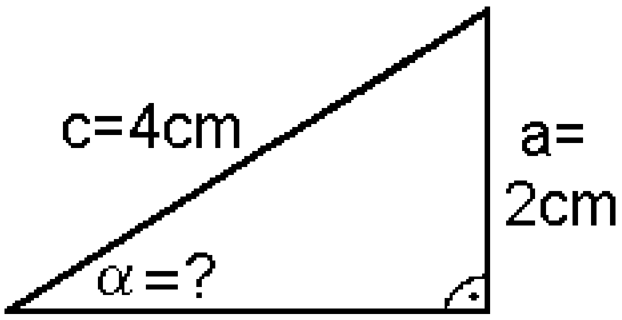
Im vorigen Kapitel haben wir mit der Sinustabelle aus einer Seite (Hypotenuse) und einem Winkel (α) eine weitere Seite (Gegenkathete von α) berechnet:



■ Winkelberechnung

Sind umgekehrt zwei Seiten gegeben (im Bild unten: die Gegenkathete zu α und die Hypotenuse), so können wir, ebenfalls mit der Sinustabelle, die Winkel des Dreiecks berechnen. Dazu ein Beispiel:

■ Beispiel



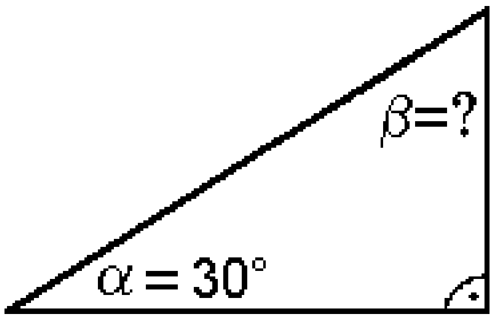
Zuerst bilden wir das Seitenverhältnis Sinus α, also das Seitenverhältnis Gegenkathete von α zur Hypotenuse:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{2cm}{4cm} = 0.5$$

Nun schauen wir in der Sinustabelle nach, bei welchem Winkel der Sinus den Wert 0.5 hat. Es ist der Winkel α = 30°:

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$	0	0.17	0.34	0.50	0.64	0.77	0.87	0.94	0.98	1

Nun müssen wir noch den Winkel β berechnen. Dies geschieht mit dem Winkelsummensatz:



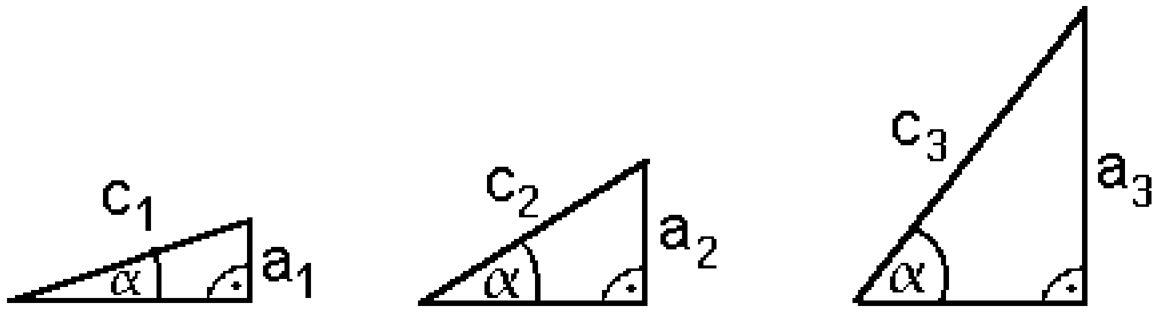
$$30° + \beta + 90° = 180°$$

$$\underline{\underline{\beta = 60°}}$$

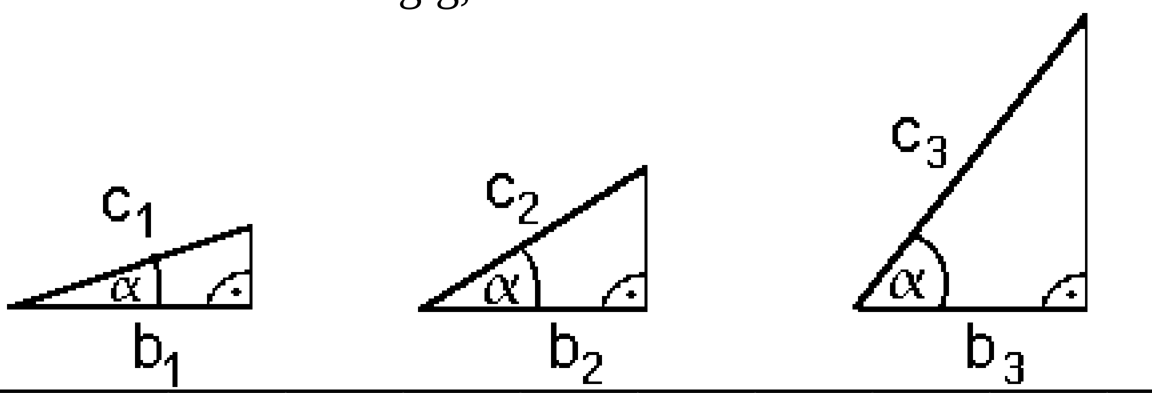
Version: Test ©Raddy '99	# Inhalt zu: **Trigonometrie II** ZURÜCK
Info-Seite	Vorkenntnisse: ... Themen: ... Infos: www.mathematik.net

Cosinus

Im vorigen Kapitel (Trigonometrie I) definierten wir das Seitenverhältnis Gegenkathete von α zur Hypothenuse als den Sinus von α (im Bild: a/c):



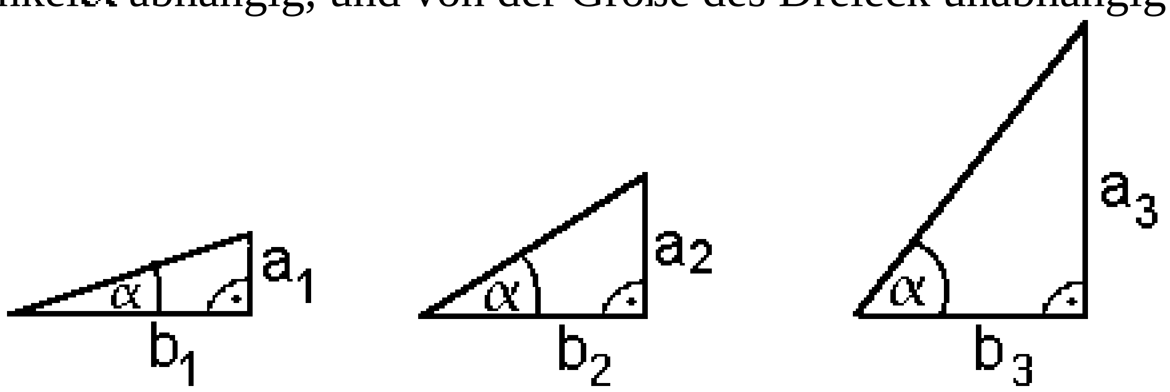
Nun zum Seitenverhältnis Ankathete von α / Hypothenuse (Bild: b/c). Diese Seitenverhältnis nennt man den Cosinus von α. Auch der Cosinus ist vom Winkelα abhängig, und von der Größe des Dreiecks unabhängig:



α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$	1	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,5	0,34	0,17	0

Tangens

Neben Sinus und Cosinus gibt es noch ein drittes Seitenverhältnis: Das Seitenverhältnis "Gegenkathete von α zur Ankathete von α" (Bild: a/b), genannt: Tangens α. Auch dieses Seitenverhältnis ist vom Winkelα abhängig, und von der Größe des Dreieck unabhängig:



α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$	0	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,74	5,67	---

Cotangens

Das Seitenverhältnis Ankathete von α zur Gegenkathete von α nennt man Cotangens.
Der Cotangens ist der Kehrwert des Tangens: cot α = tan $1/\alpha$

Aufgabentypen

Es gibt 9 Aufgabentypen beim Berechnen rechtwinkliger Dreiecke.

Übungen

Übungen zur Berechnung rechtwinkliger Dreiecke

Trigonometrie II

ZURÜCK

Info-Seite

Notwendige Vorkenntnisse

Das Kapitel Trigonometrie I. Dort lernten wir den Sinus des rechtwinkligen Dreiecks kennen.

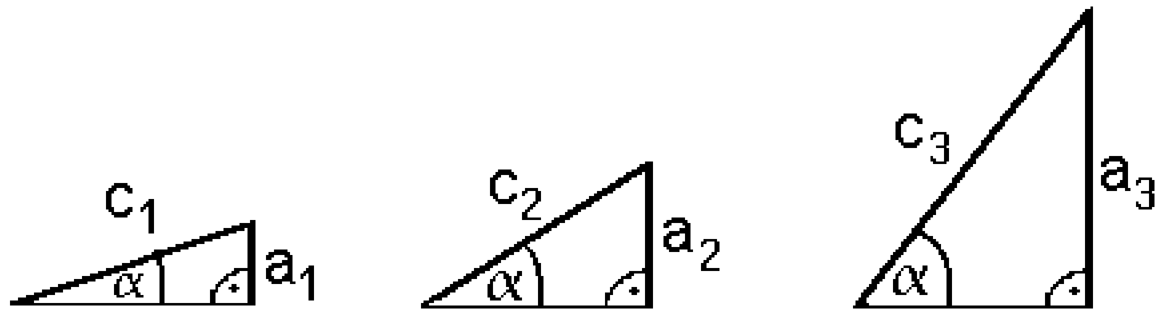
Was wird in diesem Kapitel gelernt

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den übrigen Seitenverhältnissen am rechtwinkligen Dreieck, also dem Cosinus, Tangens und dem Cotangens.

Trigonometrie II

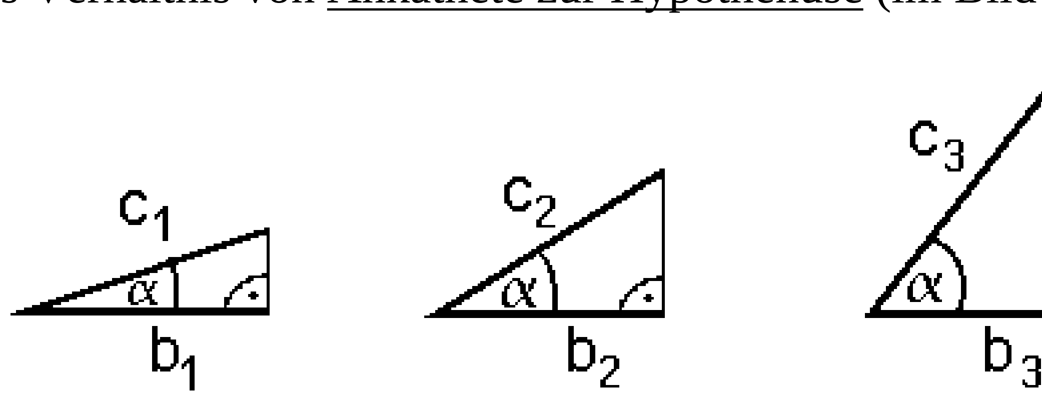
■ Rückblick

Bis jetzt haben wir das Seitenverhältnis Gegenkathete zur Hypothenuse (im Bild a/c) kennengelernt, und dieses Seitenverhältnis Sinus genannt. Wir stellten fest, daß der Sinus nur vom Winkel α abhängig ist:.



■ Der Cosinus

Das nächste Seitenverhältnis, daß wir kennenlernen wollen, ist das Verhältnis von Ankathete zur Hypothenuse (im Bild b/c):



Dieses Seitenverhältnis nennt man den Cosinus. Der Cosinus ist (nur) vom Winkel α abhängig ist, was man im Bild sehr schön sieht.

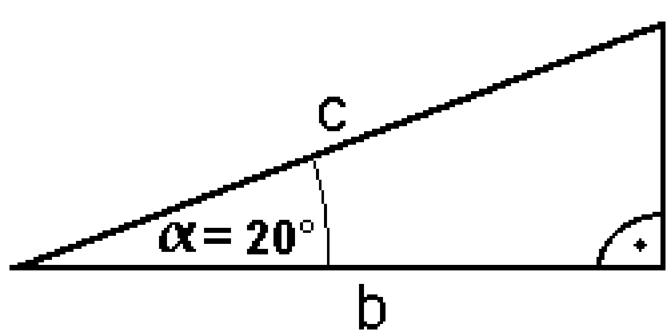
■ Die Cosinustabelle

Im Kapitel Trigonometrie I haben wir eine Sinustabelle erstellt. Das gleiche kann man auch für den Cosinus machen. Die Cosinustabelle:

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$	1	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,5	0,34	0,17	0

Exemplarisch zeigen wir, wie der Cosinus von 20° ermittelt wird:

1. Man zeichnet ein rechwinkliges Dreieck, mit einem 20° Winkel:



2. Nun mißt man die Ankathete von α und die Hypothenuse:
   b= 52mm **c=55mm**

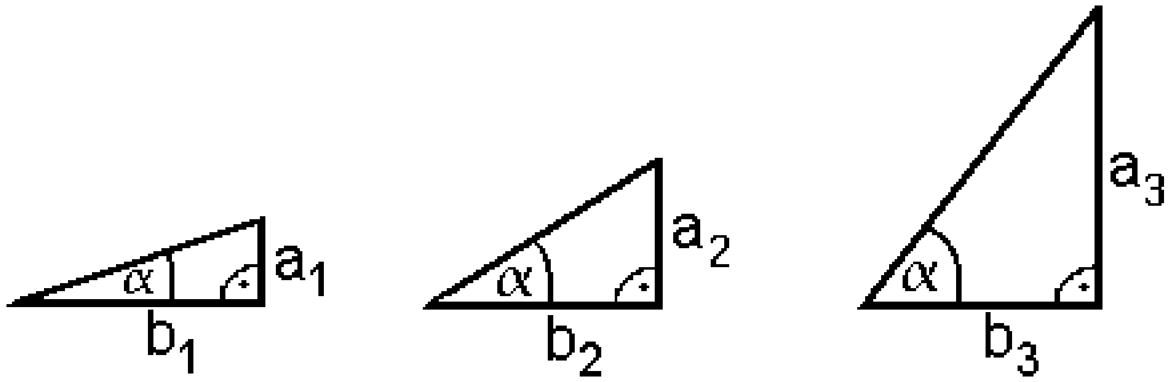
3. Nun teilt man die Ankathete von α durch die Hypothenuse, und erhält den Cosinus von 20°:

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} = \frac{52\text{mm}}{55\text{mm}} = \underline{\underline{0.94}}$$

Trigonometrie II

■ Der Tangens

Das vorletzte Seitenverhältnis, daß wir kennenlernen wollen, ist das Verhältnis von Gegenkathete zur Ankathete (im Bild a/b):



Dieses Seitenverhältnis nennt man den Tangens. Der Tangens ist (nur) vom Winkel α abhängig ist, was man im Bild sehr schön sieht.

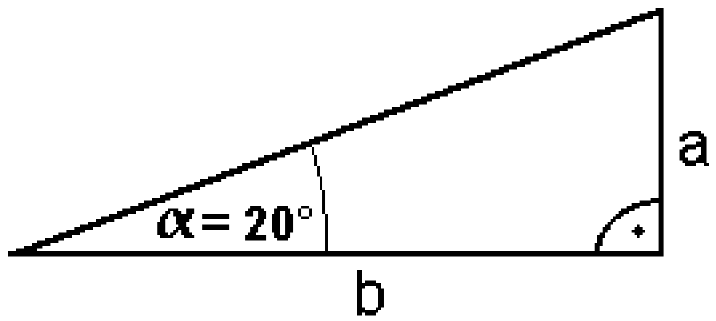
■ Die Tangenstabelle

Nach der Sinus- und der Cosinustabelle, wollen wir nun eine Tabelle des Tangens erstellen:

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$	0	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,74	5,67	---

Exemplarisch zeigen wir, wie der Tangens von 20° ermittelt wird:

1. Man zeichnet ein rechwinkliges Dreieck, mit einem 20° Winkel:



2. Nun mißt man die Gegenkathete von α, und die Ankathete von α:
   a= 19mm **b=52mm**

3. Nun teilt man die Gegenkathete von α durch die Ankathete von α, und erhält den Tangens von 20°:

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{19\text{mm}}{52\text{mm}} = \underline{\underline{0.36}}$$

■ Anwendungen der Tangenstabelle

Anwendungen der Sinus-, Cosinus und Tangenstabelle folgen am Ende des Kapitel (unter Übungen).

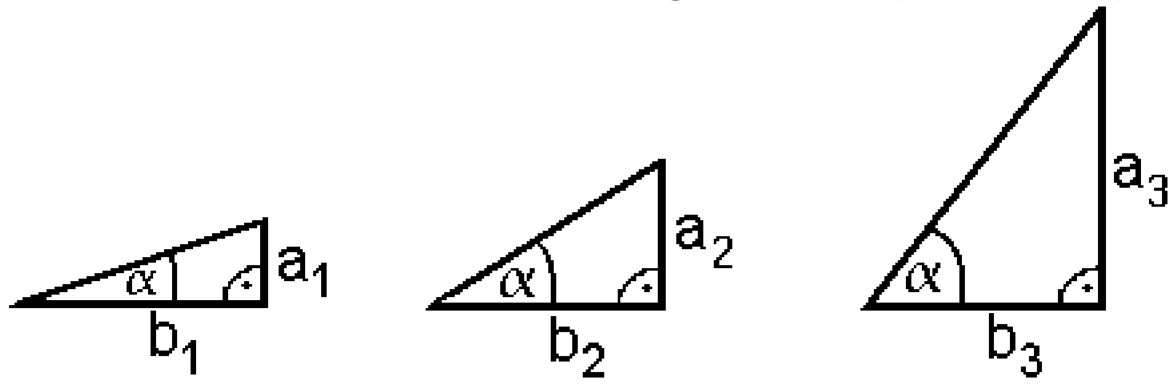
Trigonometrie II

ZURÜCK

Der Cotangens

Der Cotangens

Das letzte Seitenverhältnis, daß wir kennenlernen wollen, ist das Verhältnis von Ankathete zur Gegenkathete (im Bild b/a):



Dieses Seitenverhältnis nennt man Cotangens. Der Cotangens ist (nur) vom Winkel α abhängig ist, was man im Bild sehr schön sieht.

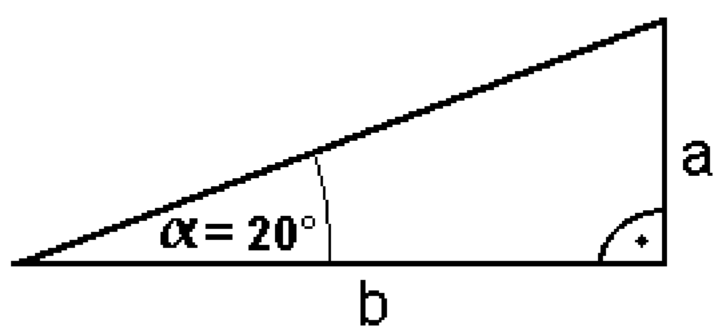
Die Cotangenstabelle

Nach der Sinus-, der Cosinus und der Tangenstabelle, wollen wir nun eine Tabelle des Cotangens erstellen:

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$	---	5,67	2,74	1,73	1,19	0,84	0,58	0,36	0,17	---

Exemplarisch zeigen wir, wie der Cotangens von 20° ermittelt wird:

1. Man zeichnet ein rechwinkliges Dreieck, mit einem 20° Winkel:



2. Nun mißt man die Gegenkathete und die Ankathete von α:
   a= 19mm **b=52mm**

3. Nun teilt man die Ankathete von α durch die Gegenkathete von α, und erhält den Cotangens von 20°:

$$\cot\alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Gegenkathete von } \alpha} = \frac{52\text{mm}}{19\text{mm}} \approx \underline{\underline{2.74}}$$

Tangens und Cotangens

Während der Tangens das Verhältnis "Gegenkathete zur Ankathete" ist, ist der Cotangens das Verhältnis "Ankathete zur Gegenkathete". Der Cotangens ist also einfach nur der Kehrwert des Tangens, d.h. es gelten folgende zwei Gleichungen:

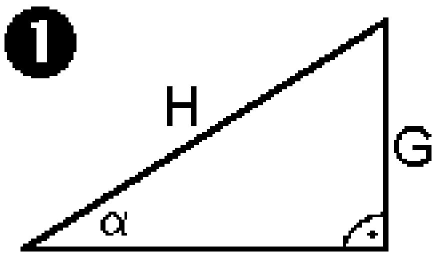
$$\boxed{\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \qquad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}}$$

Version: Test ©Raddy '99	# Trigonometrie II ZURÜCK

Aufgabentypen

■ Ein Winkel ist gesucht:

❶



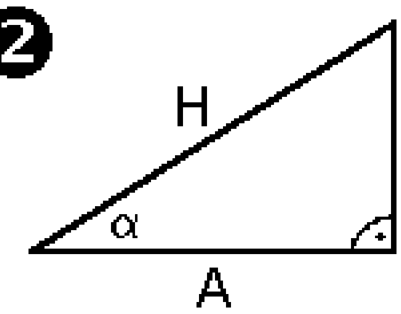
Gegeben:
Gegenkathete
Hypothenuse

Gesucht: α

Ansatz:

$\sin\alpha = \frac{G}{H}$

❷



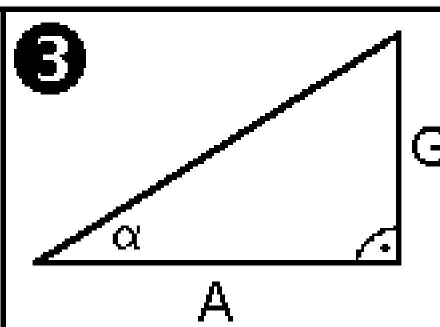
Gegeben:
Ankathete
Hypothenuse

Gesucht: α

Ansatz:

$\cos\alpha = \frac{A}{H}$

❸



Gegeben:
Gegenkathete
Ankathete

Gesucht: α

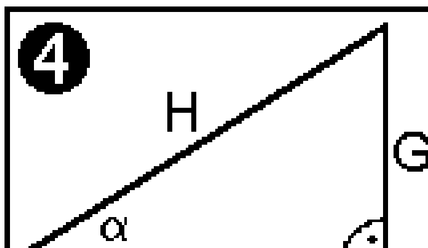
Ansatz:

$\tan\alpha = \frac{G}{A}$

Aufgaben auf der nächsten Seite

■ Eine Seite ist gesucht:

❹



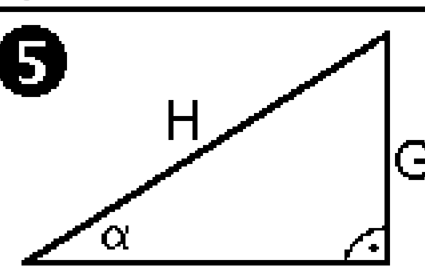
Gegeben: α,
Gegenkathete

Gesucht:
Hypothenuse

Ansatz:

$\sin\alpha = \frac{G}{H}$

❺



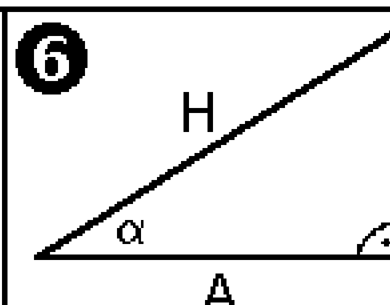
Gegeben: α,
Hypothenuse

Gesucht:
Gegenkathete

Ansatz:

$\sin\alpha = \frac{G}{H}$

❻



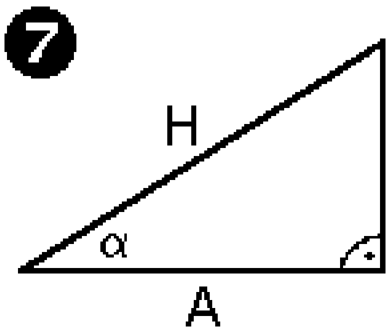
Gegeben: α,
Ankathete

Gesucht:
Hypothenuse

Ansatz:

$\cos\alpha = \frac{A}{H}$

❼



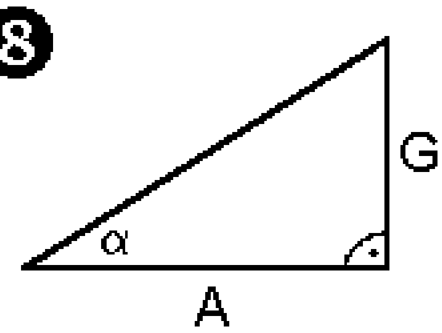
Gegeben: α,
Hypothenuse

Gesucht:
Ankathete

Ansatz:

$\cos\alpha = \frac{A}{H}$

❽



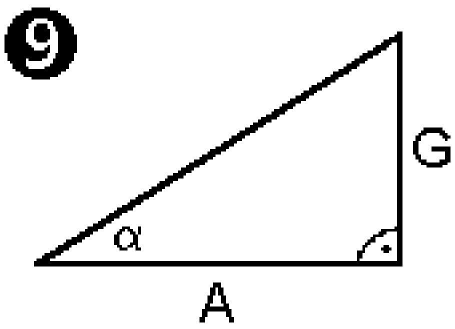
Gegeben: α,
Gegenkathete

Gesucht:
Ankathete

Ansatz:

$\tan\alpha = \frac{G}{A}$

❾



Gegeben: α,
Ankathete

Gesucht:
Gegenkathete

Ansatz:

$\tan\alpha = \frac{G}{A}$

Aufgaben auf der nächsten Seite

Trigonometrie II

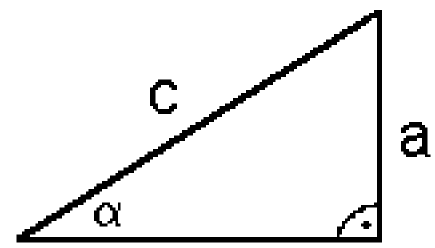
ZURÜCK

Übungen

■ Übung 1:

<u>Gegeben:</u> $a=18mm$
$c=34mm$

<u>Gesucht:</u> α



<u>Lösung:</u>

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

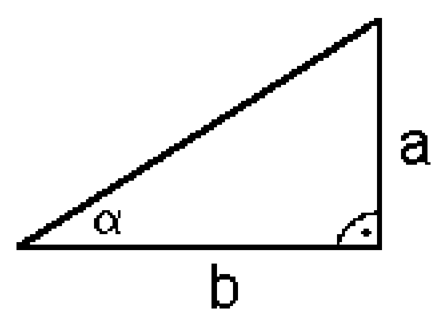
$$\sin\alpha = \frac{a=18mm}{c=34mm} = 0.53$$

$$\underline{\underline{\alpha = 32°}}$$

■ Übung 2:

<u>Gegeben:</u> $a=18mm$
$\alpha = 32°$

<u>Gesucht:</u> b

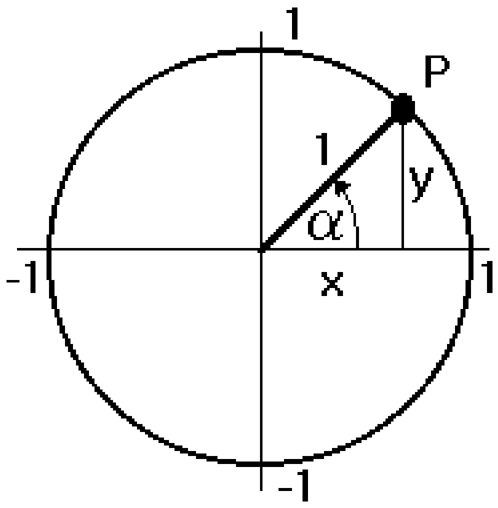
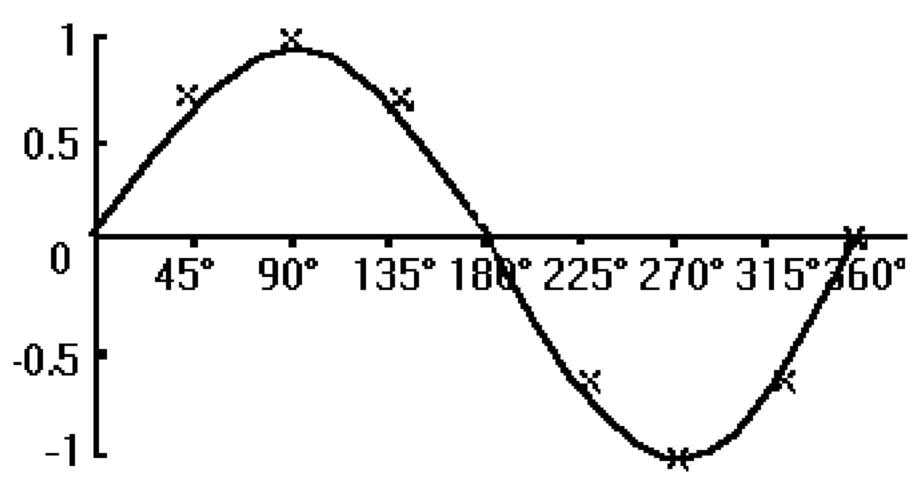
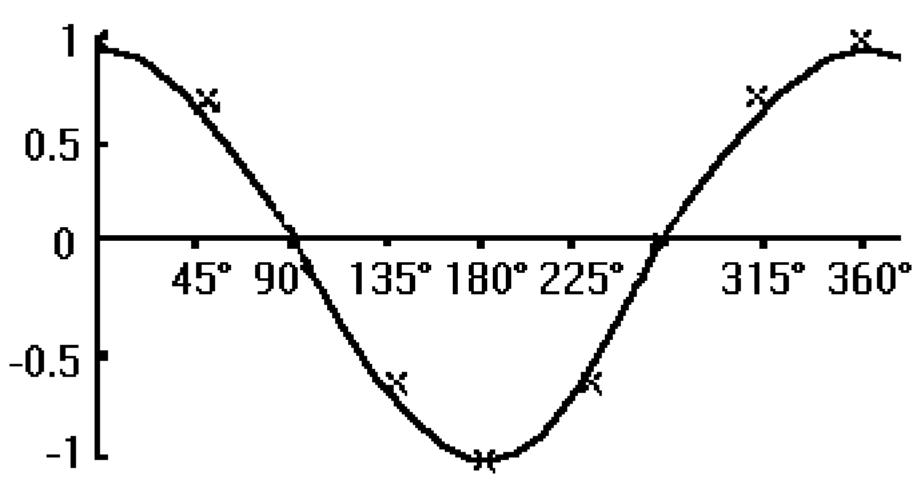


<u>Lösung:</u>

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\tan\alpha \cdot b = a$$

$$b = \frac{a}{\tan\alpha} = \frac{a=18mm}{\tan 32°} = \frac{a=18mm}{0.625} = \underline{\underline{29mm}}$$

Version: Test ©Raddy '99	Inhalt zu: **Trigonometrie III** ZURÜCK
Info-Seite	Vorkenntnisse: ... Themen: ... Infos: www.mathematik.net
Einheitskreis	Ein Kreis mit dem Radius 1, nennt man einen Einheitskreis
Sinus und Cosinus am Einheitskreis	 Die y-Koordinate von P nennt man Sinus α Die x-Koordinate von P nennt man Cosinus α
Übungen	4 Übungsaufgaben
Lösungen	Die Lösungen zu diesen Aufgaben
Negative Winkel	sin $(-\alpha)$ = sin $(360°-\alpha)$ cos $(-\alpha)$ = cos $(360-\alpha)$
Winkel >360°	sin $(n \cdot 360°+\alpha)$ = sin α cos $(n \cdot 360°+\alpha)$ = cos α
Zusammenhang mit alter Definition	Die alte Definition (sin α = Gegenkathete α/Hypothenuse) aus dem Kapitel 1 wiederspricht nicht der neuen Definition am Einheitskreis. Gleiches gilt für die "alte" Definition des Cosinus.
Bestimmung von α aus sin α	Die Definition des "Sinus am Einheitskreis" ordnet einen bestimmten Wert sin α mehrere Winkel zu.
Bestimmung von α aus cos α	Die Definition des "Cosinus am Einheitskreis" ordnet einen bestimmten Wert cos α mehrere Winkel zu.
Sinusfunktion	Durch die Definition "Sinus am Einheitskreis" entsteht eine Funktion.
Graph der Sinusfunktion	
Eigenschaften	Die Sinusfunktion ist eine ungerade Funktion mit einer Periode von 360°.
Cosinusfunktion	Durch die Definition "Cosinus am Einheitskreis" entsteht eine Funktion.
Graph der Cosinusfunktion	
Eigenschaften	Die Cosinusfunktion ist eine gerade Funktion mit einer Periode von 360°.

Trigonometrie III

ZURÜCK

■ Notwendige Vorkenntnisse

1. Den Unterschied kennen, zwischen einer Relation und einer eindeutigen Zuordnung, die man ja Funktion nennt.
   (näheres in den Kapiteln Relation II bzw. Funktionen I)

2. Den Unterschied kennen, zwischen einer geraden und einer ungeraden Funktion (siehe Funktionen I).

3. Die Kapitel Trigonometrie I und II
   (Berechnung rechtwinkliger Dreiecke)

■ Themen dieses Kapitels

Im Kapitel 1 definierten wir die Begriffe Sinus und Cosinus. Diese Begriffe kann man aber auch auf eine andere Art definieren. Man nennt diese Definitionen:

Sinus am Einheitskreis
Cosinus am Einheitskreis

Aus diesen beiden Definitionen ergibt sich dann die Sinus- bzw. Cosinusfunktion.

Version: Test
©Raddy '99

Trigonometrie III

ZURÜCK

Der Einheitskreis

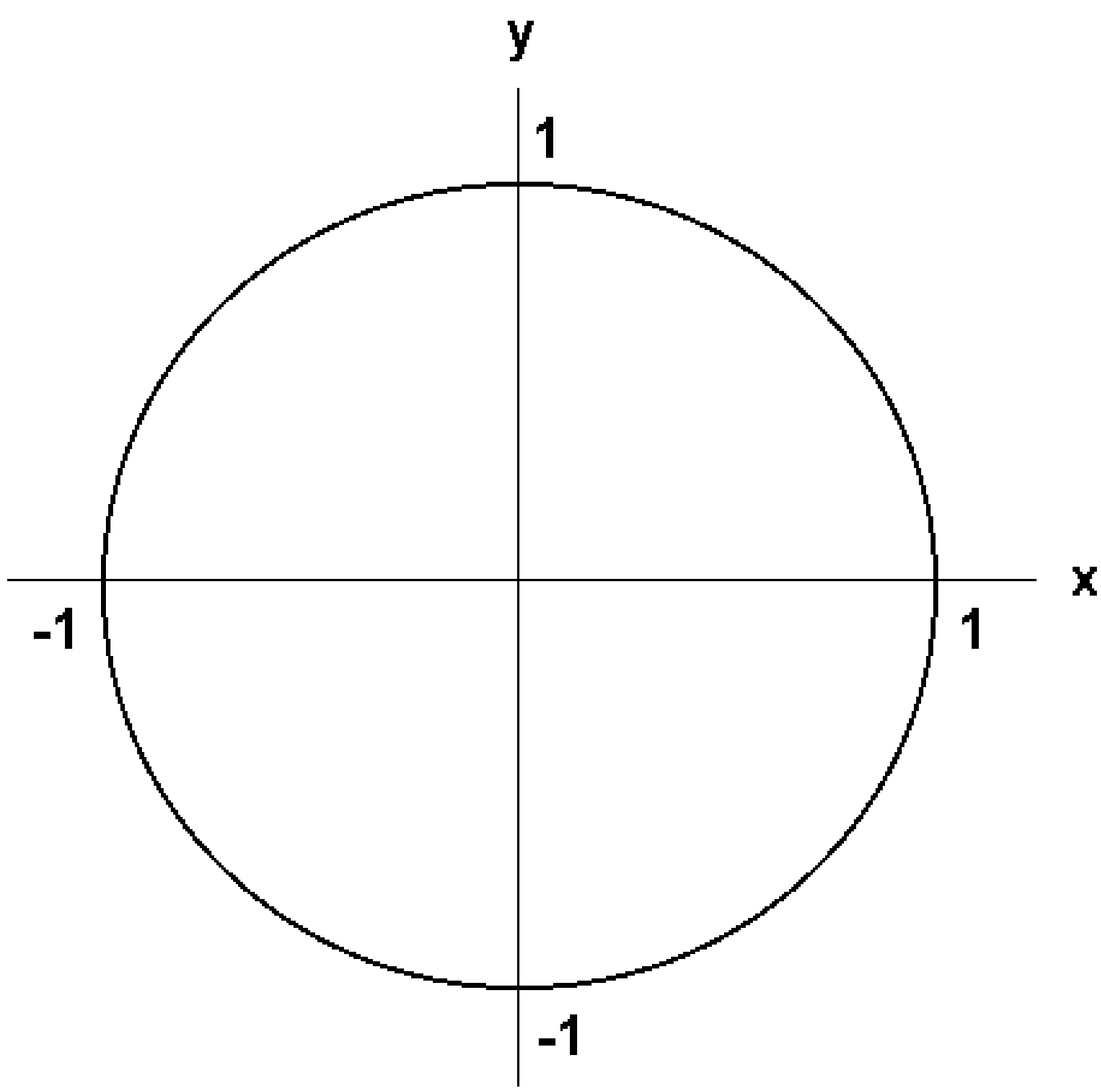
■ Definition

Einen Einheitskreis ist ein Kreis mit einem Radius von
1 Längeneinheit. Durch seinen Mittelpunkt geht ein
rechtwinkliges Koordinatensystem.

■ Erklärung zur Definition

Wie groß die Längeneinheit ist spielt keine Rolle.
Die Längeneinheit kann 1cm , 1m aber auch 4cm oder
3,5mm usw. sein.

■ Bild: Der Einheitskreis



Version: Test
©Raddy '99

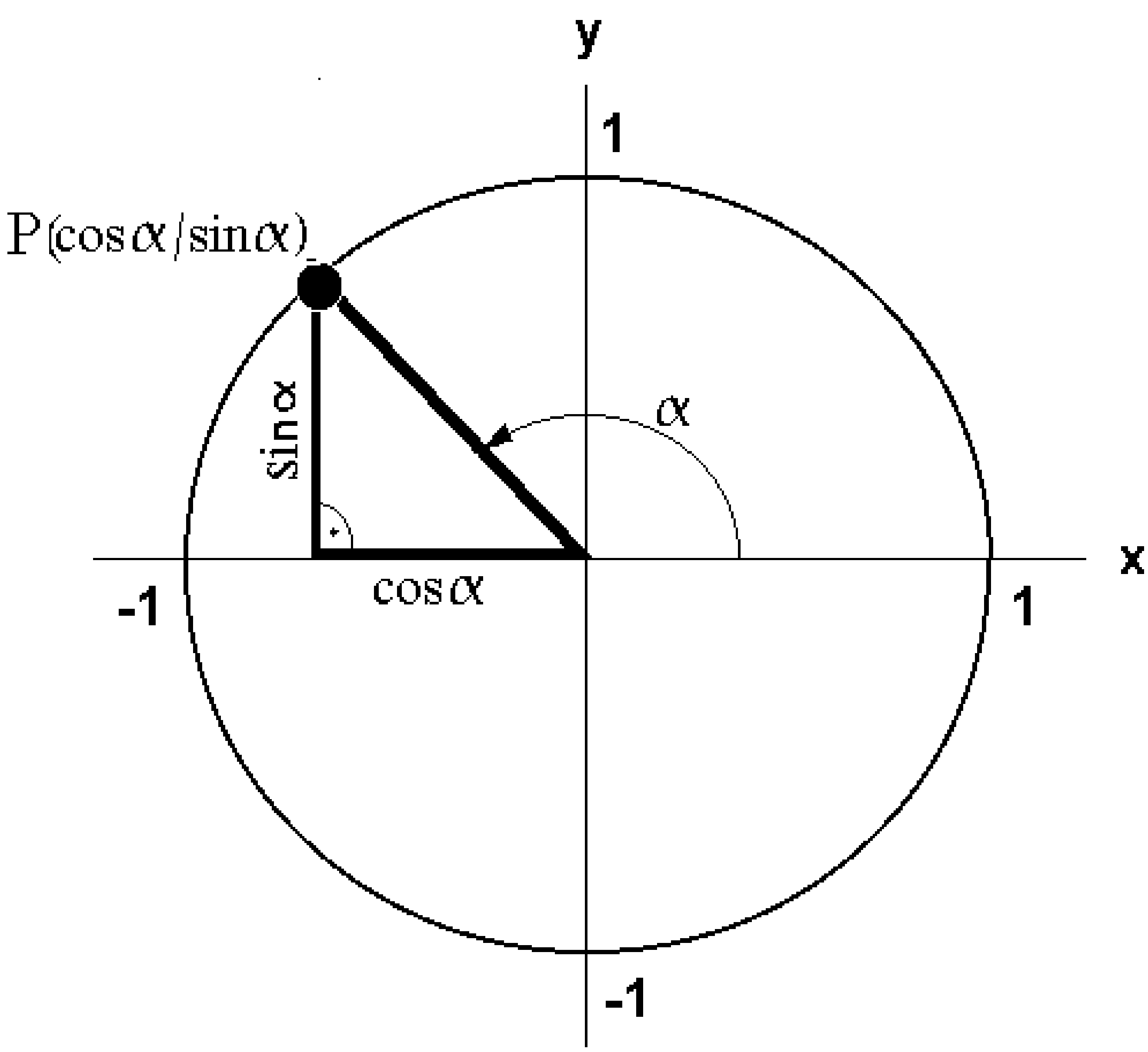
Trigonometrie III

ZURÜCK

Sinus und Cosinus am Einheitskreis

■ Definition

Wir nehmen einen Einheitskreis und lassen den positiven Teil der x-Achse um den Winkel α rotieren. Die x-Koordinate des Endpunktes P nennt man Cosinus α (oder kurz: cos α) , die y-Koordinate des Endpunktes P nennt man Sinus α (kurz sin α):

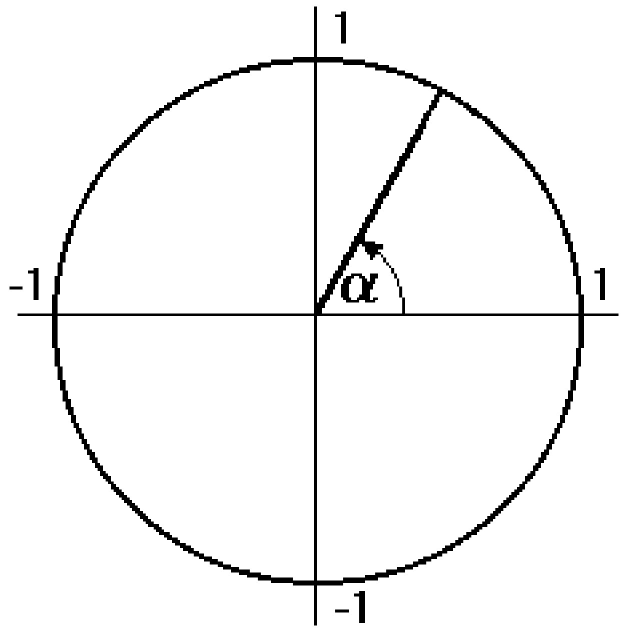


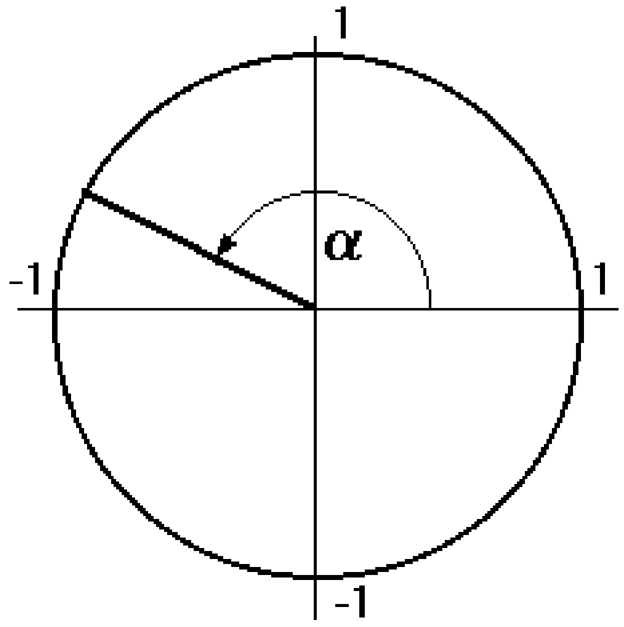
Übungs-Aufgaben dazu auf der nächsten Seite!

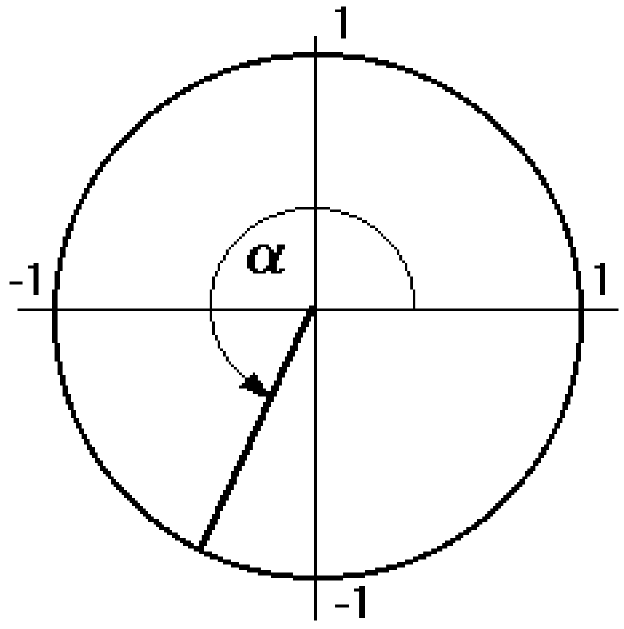
Trigonometrie III

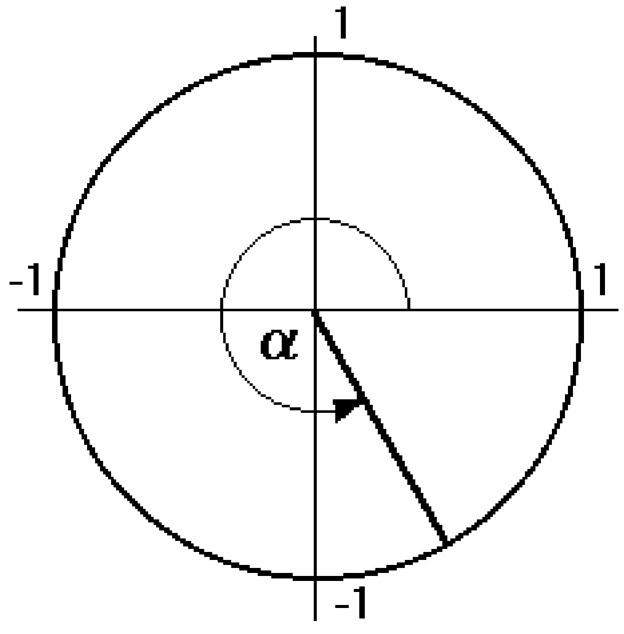
■ Aufgabe 1 bis 4

Die folgenden vier Bildern zeigen jeweils einen Einheitskreis, in dem der Winkel α gegeben ist.
Man zeichne jeweils sin α ein (als gestrichelte Linie) und cos α (als punktierte Linie). Dann bestimme man durch Messen sin α und cos α (Achtung: Zeichnung ist im Maßstab 2:1):







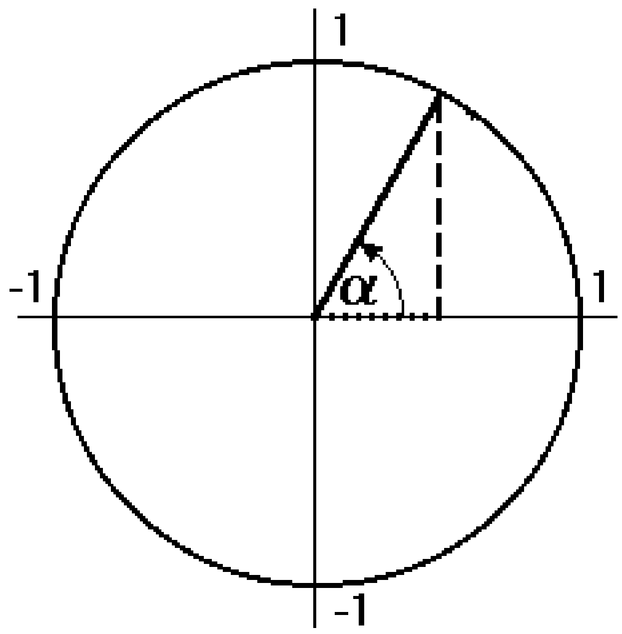


Trigonometrie III

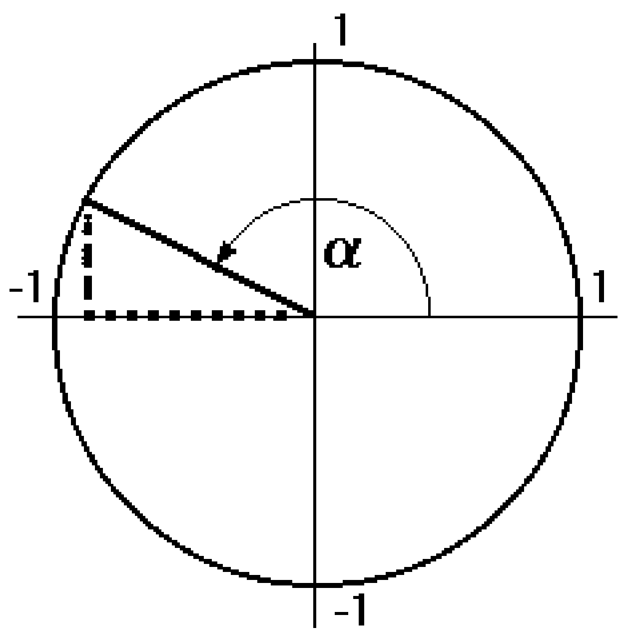
ZURÜCK

■ Lösungen zu Aufgabe 1 bis 4

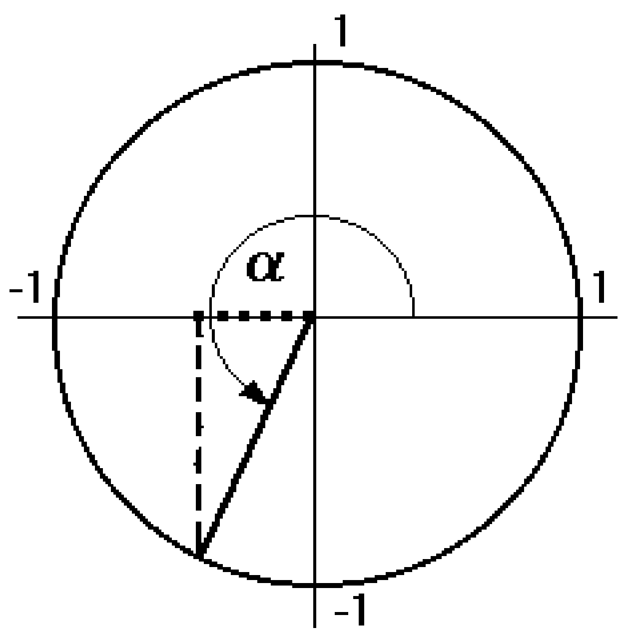
Der Sinus α ist als gestrichelte Linie eingezeichnet.
Der Cosinus α ist als punktierte Linie eingezeichnet:



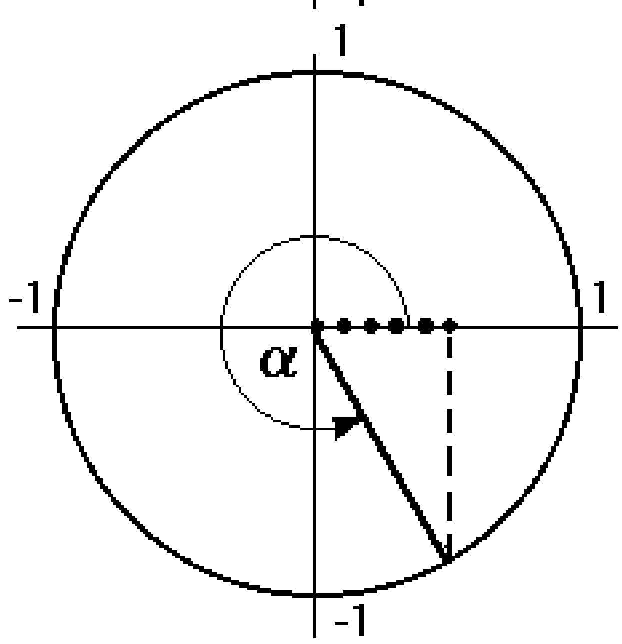
sin α = 0.9 cos α = 0.5



sin α = 0.5 cos α = -0.9



sin α = -0.9 cos α = -0.5



sin α = -0.9 cos α = 0.5

Trigonometrie III

ZURÜCK

Sinus und Cosinus von negativen Winkeln

Satz

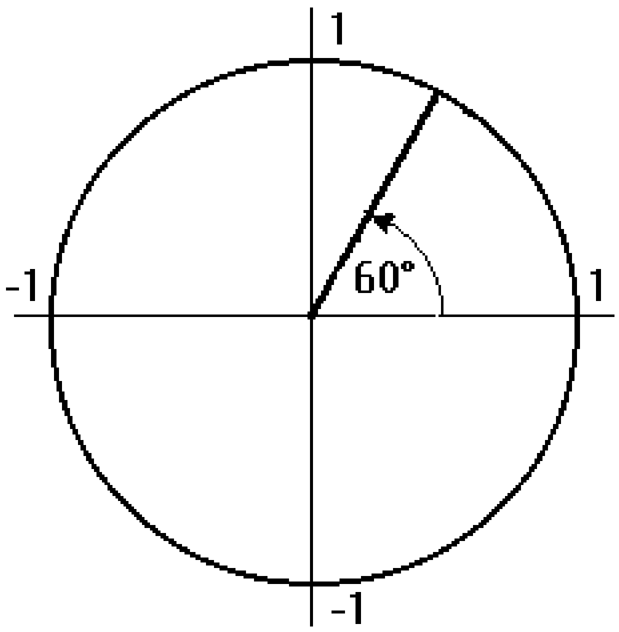
Der Sinus (Cosinus) eines negativen Winkels $-\alpha$ ist gleich dem Sinus (Cosinus) des Winkels $360°-\alpha$.

Beispiel

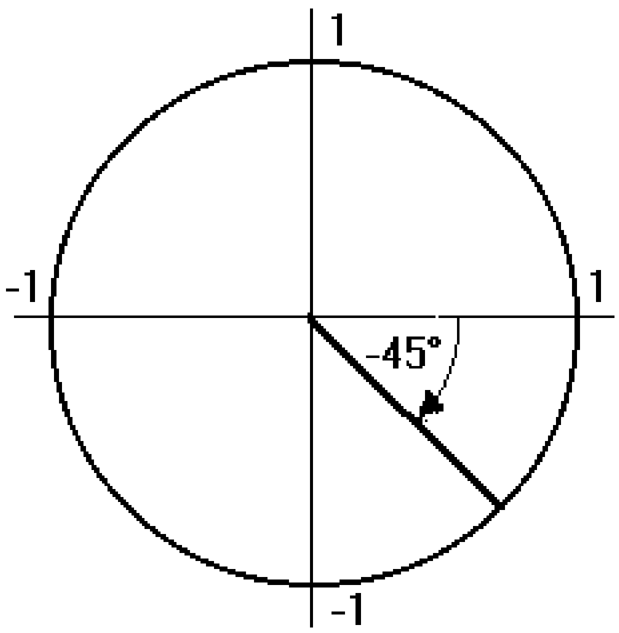
Der Sinus von -90° ist gleich dem Sinus von 360°-90°, also gleich dem Sinus von 270°.

Erläuterung

In der Definition wurde einer "Drehung der x-Achse im Uhrzeigersinn" (willkürlich) ein positiver Drehwinkel zugeordnet:



Folglich müssen wir einer Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn ein negatives Vorzeichen geben:



Anstatt den Winkel um -45° zu drehen, hätten wir ihn natürlich auch um +315° drehen können. Aus diesem Grund ist der Sinus von -45° genauso groß wie der Sinus von +315°.

Version:Test
©Raddy '99

Trigonometrie III

ZURÜCK

Sinus und Cosinus von Winkeln über 360°

■ Satz

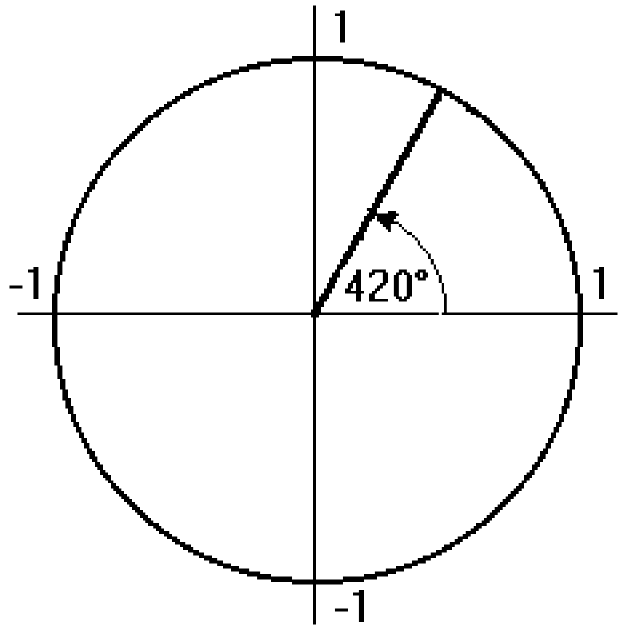
> Der Sinus (Cosinus) eines Winkels ($n \cdot 360° + \alpha$) mit $n \in N$, ist gleich dem Sinus (Cosinus) des Winkels α

■ Beispiel

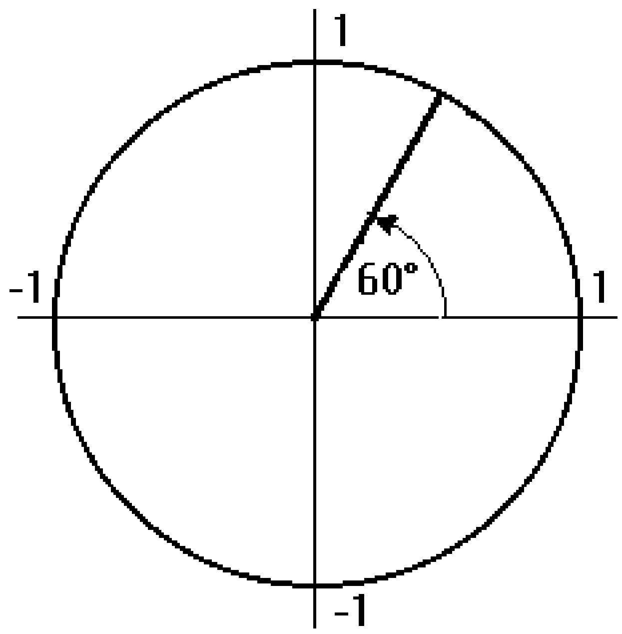
Der Sinus (Cosinus) des Winkels 370° ist gleich dem Sinus (Cosinus) des Winkels 10°.

■ Erläuterung

Nehmen wir an, ich drehe die x-Achse um 360°+60°=420°, d.h. ich drehe die x-Achse (genauer den positiven Teil) einmal ganz herum und dann nochmal um 60°:



Dann ist dies identisch mit einer Drehung um 60°:



Folglich müssen auch die Sinus- bzw. Cosinuswerte gleich sein.

Trigonometrie III

ZURÜCK

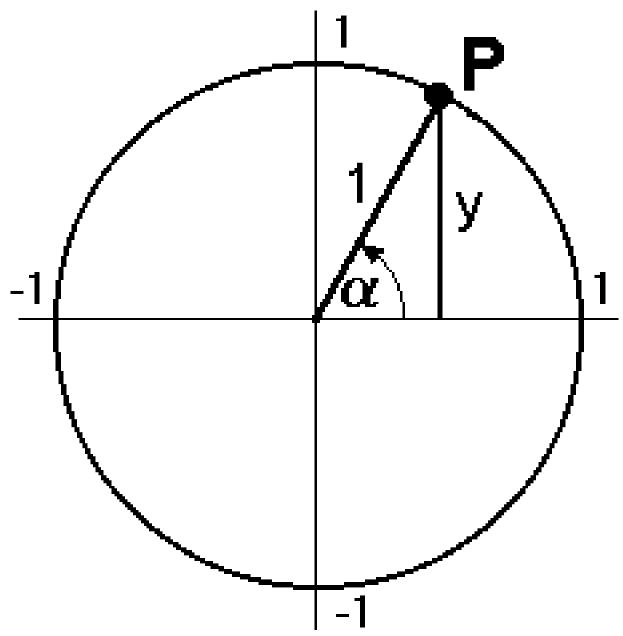
Die Problemstellung

Im Kapitel I definierten wir den Begriff "Sinus" am rechtwinkligen Dreieck (sin α = Gegenkathete von α : Hypothenuse). In diesem Kapitel definierten wir den Begriff des Sinus nochmals, nämlich am Einheitskreis (sinα = y-Koordinate).

Wir zeigen nun, daß die neue Definition des Sinus (Definition am Einheitskreis) eine Erweiterung der alten Definition (Definition am rechtwinkligen Dreieck) ist:

Der Zusammenhang

Im folgenden Bild ist ein rechtwinkliges Dreieck in den Einheitskreis eingezeichnet, wobei 0°<α<90° sein soll:



Laut alter Definition aus Kapitel I gilt in diesem Dreieck:

sin α = Gegenkathete von α / Hypothenuse

Die Hypothenuse hat den Wert 1, also gilt:

sin α = Gegenkathete von α

Die Gegenkathete ist aber, wie man den Bild entnehmen kann, gleich dem y-Koordinate des Punktes P:

sin α = y-Koordinate des Punktes P

Dies ist aber auch die neue Definition des Sinus (Definition am Einheitskreis) womit die Gleichheit der beiden Definitionen für 0°<α<90° bewiesen ist.

Die neue Definition (am Einheitskreis) ordnet aber auch Winkeln über 90° einen Sinuswert zu, während bei der alten Definition (am rechtwinkligen Dreieck) keine Winkel über 90° vorkommen (weil im rechtwinkligen Dreieck kein Winkel größer 90° ist).

Die neue Definition ist also eine Erweiterung der alten Definition.

Trigonometrie III

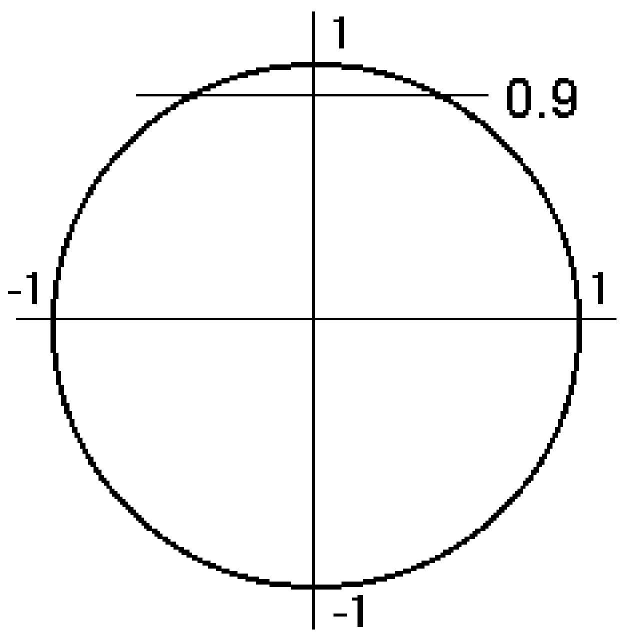
ZURÜCK

■ Die Fragestellung

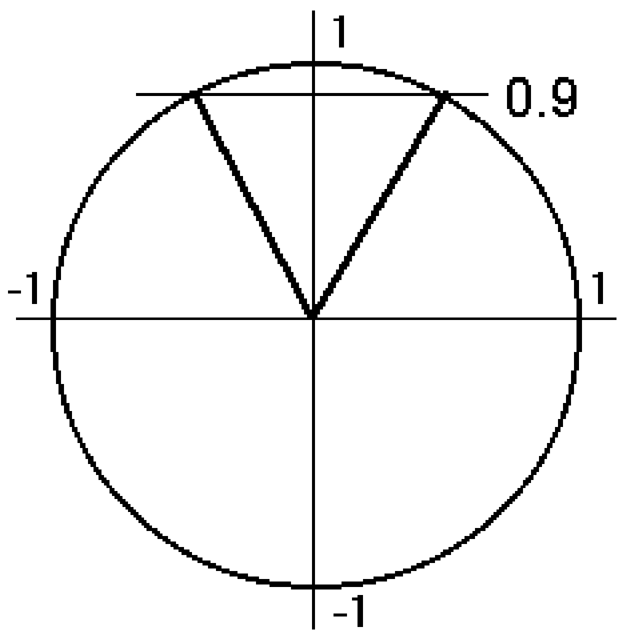
Am Anfang des Kapitels definierten wir, wie man jedem Winkel α eindeutig einen Wert sin α zugeordnet. Nun wollen wir sehen, ob diese Definition auch umgekehrt jedem Wert sin α eindeutig einen Winkel α zuordnet.

■ Beispiel

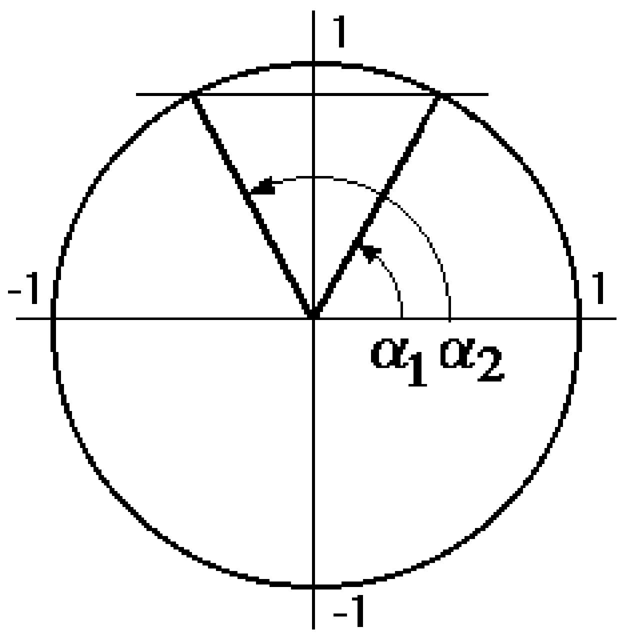
Gegeben sei sin α = 0.9 Längeneinheiten. Gesucht sei α :



Zuerst zeichnen wir bei 0.9 eine waagerechte Linie.



Dann zeichnen wir von den Schnittpunkten je eine Linie zum Mittelpunkt des Einheitskreises:



Jetzt können wir den Winkel α messen. Der Winkel α_1 ist 64°, der Winkel α_2 ist 115°. Sinus = 0.9 tritt also bei zwei Winkeln auf.

■ Fazit

Man kann aus einem gegebenen Sinuswert nicht eindeutig den Winkel α bestimmen, sondern man erhält 2 Werte für α. Berücksichtig man auch Winkel über 360°, so gibt es sogar unendlich viele Winkel α mit sin=0.9 (z.B. α = 360°+64°).

Version:Test
©Raddy '99

Trigonometrie III

ZURÜCK

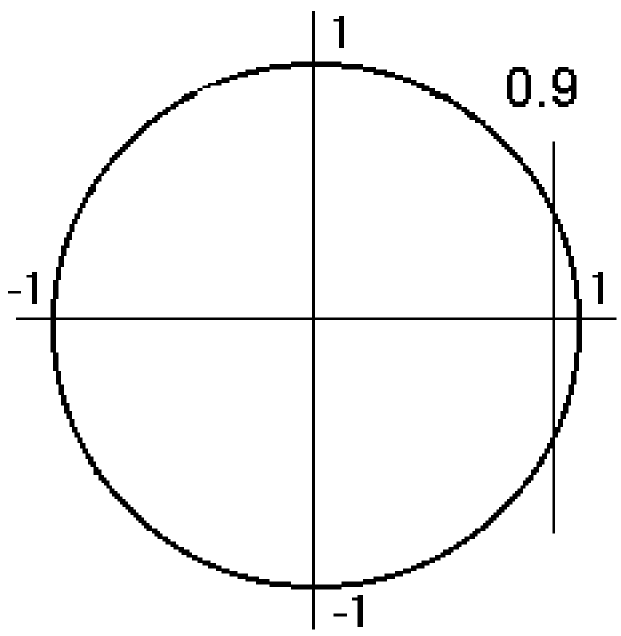
Bestimmung von α aus $\cos \alpha$

■ Die Fragestellung

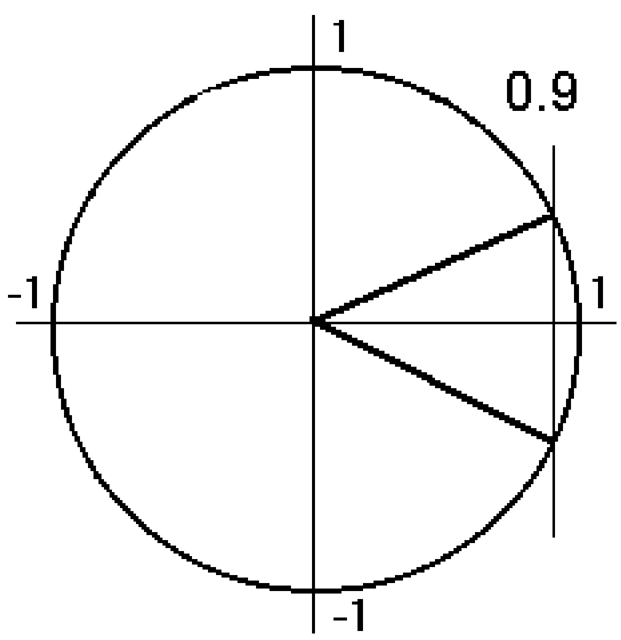
Wir haben auf einer der vorigen Seiten gelernt, daß zu einem bestimmten Wert sin α mehrere Winkel α gehören.
Analog dazu gilt, daß zu einem bestimmten Wert cos α mehrere Winkel α gehören. Dies wollen wir verdeutlichen:

■ Beispiel

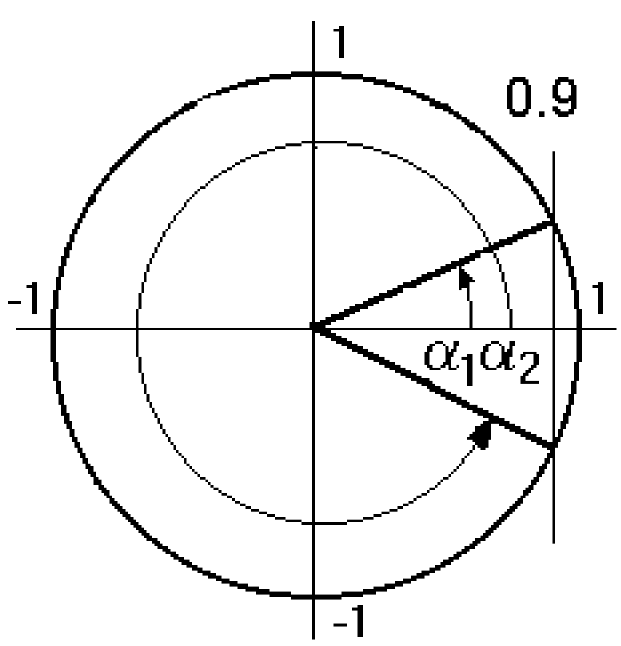
Gegeben sei cos α = 0.9 Längeneinheiten. Gesucht ist α :



Zuerst zeichnen wir bei 0.9 eine senkrechte Linie.



Dann zeichnen wir von den Schnittpunkten je eine Linie zum Mittelpunkt des Einheitskreises:



Jetzt können wir den Winkel α messen. Der Winkel α_1 ist 26°, der Winkel α_2 ist 334°.
Cosinus = 0.9 tritt also bei zwei Winkeln auf.

■ Fazit

Man kann aus einem gegebenen Cosinuswert nicht eindeutig den Winkel α bestimmen, sondern man erhält 2 Werte für α.
Berücksichtig man auch Winkel über 360°, so gibt es sogar unendlich viele Winkel α mit cos α = 0.9 (z.B. α = 360°+26°).

Trigonometrie III

ZURÜCK

Die
Sinusfunktion

■ Rückblick

Zuerst wollen wir wiederholen, was wir in diesem Kapitel bis jetzt gelernt haben. Wir befaßten uns mit zwei Dingen:

❶ Durch die Definition des Sinus am Einheitskreis kann man jedem Winkel α eindeutig einen Wert (Sinus genannt) zuordnen. Eine eindeutige Zuordnung hatten wir Funktion genannt.

❷ Umgekehrt kann man jedem Sinuswert (z.B. sin=0.9) einen Winkel α zuordnen. Wie wir auf der vorigen Seite sahen, ist diese Zuordnung aber nicht eindeutig, also nur eine Relation.

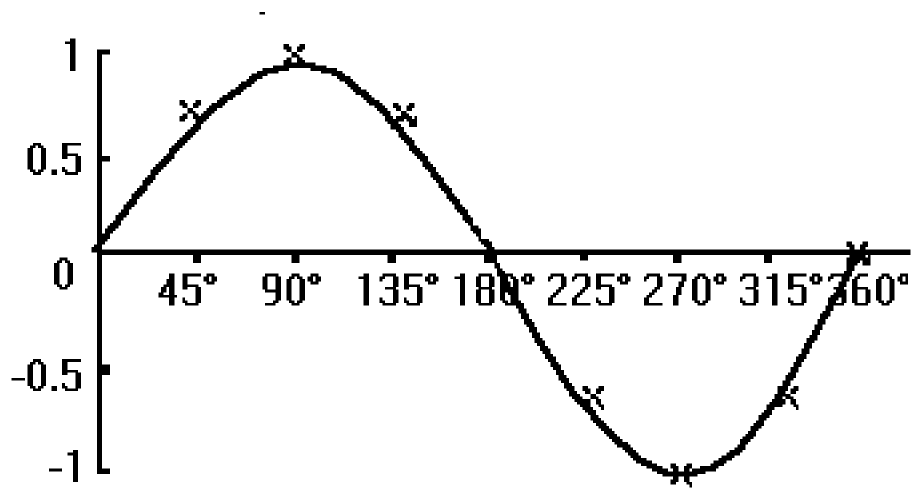
■ Die Sinusfunktion

Wir wollen nun Punkt ❶ näher betrachten. Wie gesagt haben wir durch die Definition "Sinus am Einheitskreis" jedem Winkel α eindeutig einen (Sinus genannten) Wert zuordnet. Da diese Zuordnung eindeutig ist, ist sie eine Funktion. Wir nennen sie Sinusfunktion. Wir fassen zusammen:

Durch die am Anfang des Kapitels gemachte Definition des "Sinus am Einheitskreis" wird eine Funktion definiert, die man Sinusfunktion nennt.

■ Der Graph der Sinusfunktion

Der Graph der Sinusfunktion hat folgendes Bild:



Wie man den Graphen erstellt, zeigen wir auf der nächsten Seite.

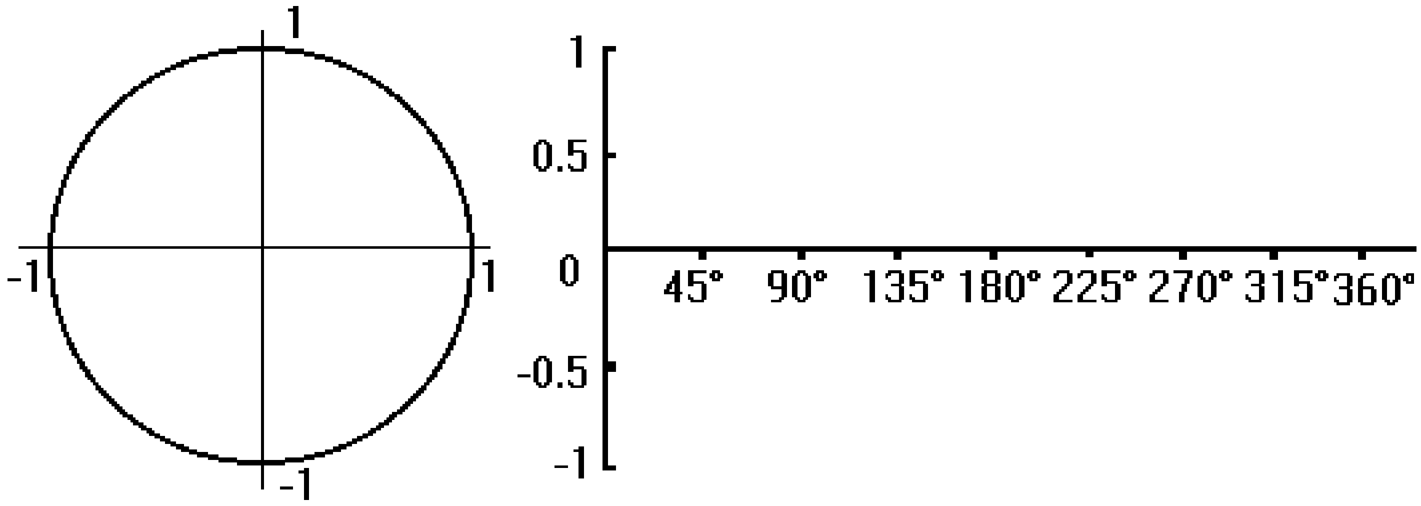
Trigonometrie III

ZURÜCK

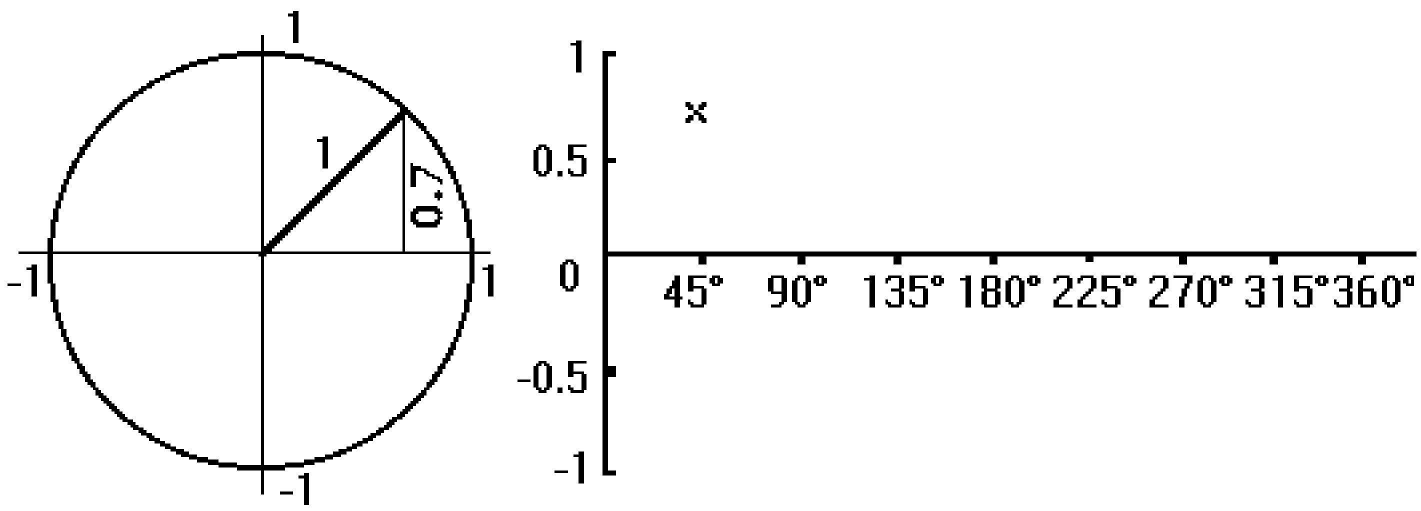
Graph der Sinusfunktion

■ Veranschaulichung

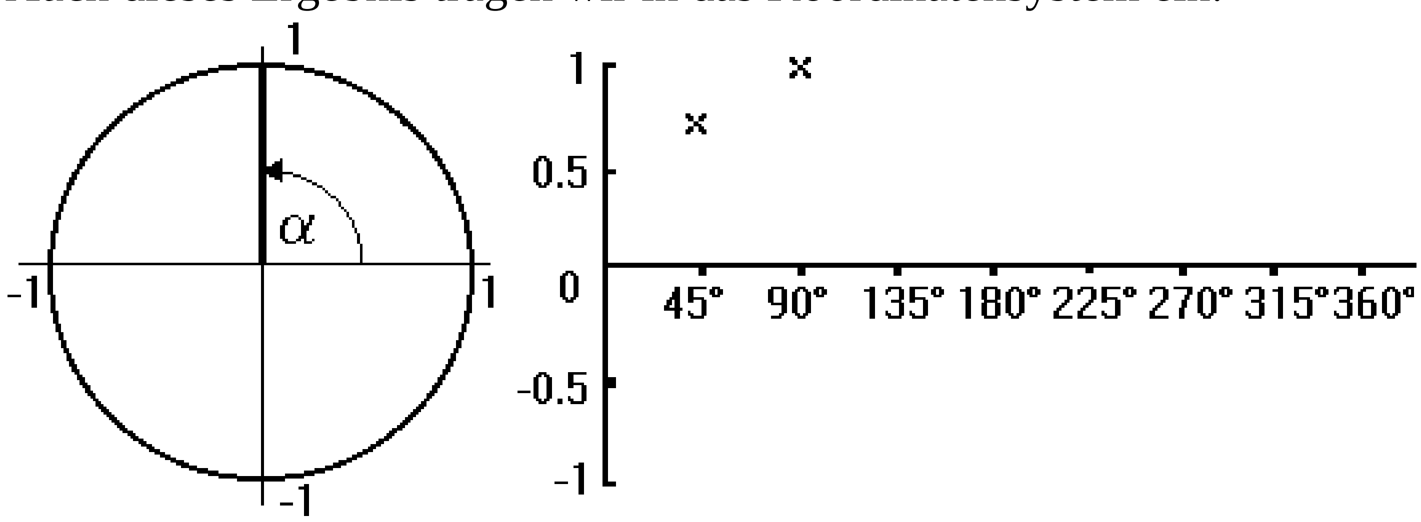
Nun wollen wir zeigen, wie man die Sinusfunktion zeichnet. Zunächst zeichnen wir einen Einheitskreis und daneben ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die Abszisse beschriften wir mit Gradzahlen, die Ordinate mit Werten zwischen -1 und 1:



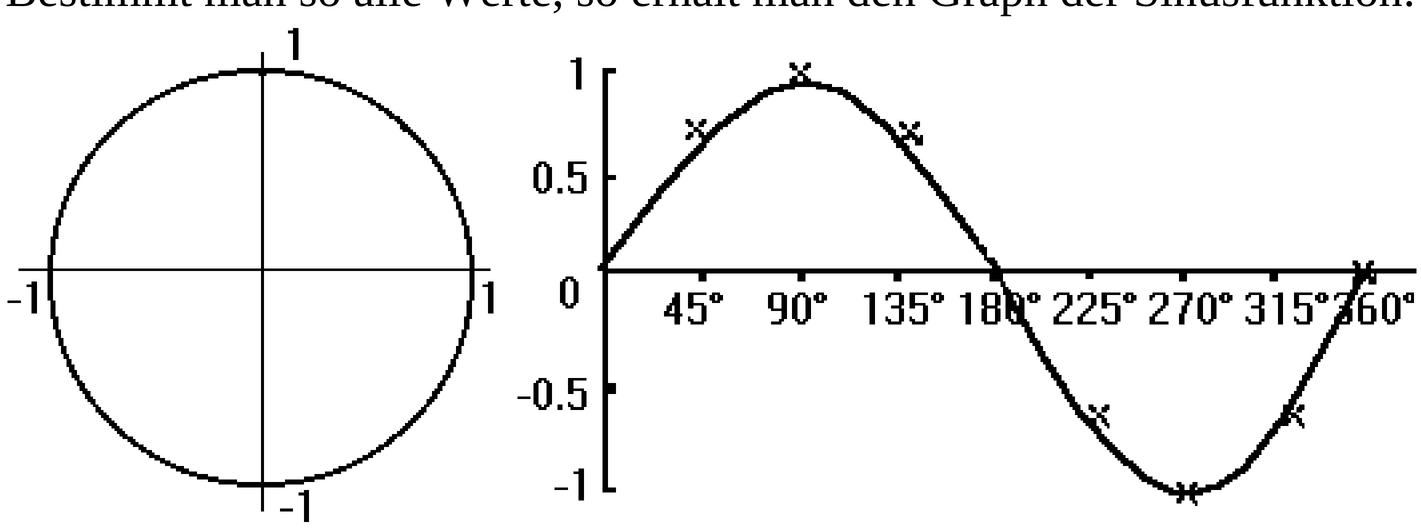
Als erstes Beispiel wählen wir den Winkel α=45°. Nun bestimmen wir sin 45° am Einheitskreis (durch Messen). Das Ergebnis ist 0,7. Dieses Ergebnis tragen wir in das Koordinatensystem ein:



Als zweites Beispiel bestimmen wir sin 90°. Das Ergebnis ist 1. Auch dieses Ergebnis tragen wir in das Koordinatensystem ein:



Bestimmt man so alle Werte, so erhält man den Graph der Sinusfunktion:



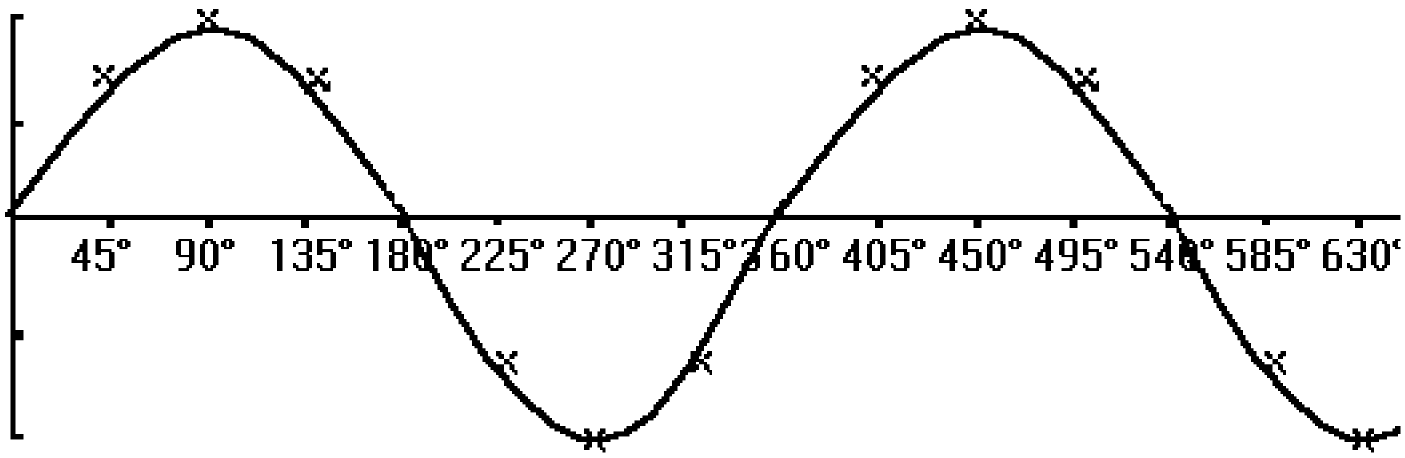
Trigonometrie III

ZURÜCK

Eigenschaften der Sinusfunktion

■ Periodizität von 360°

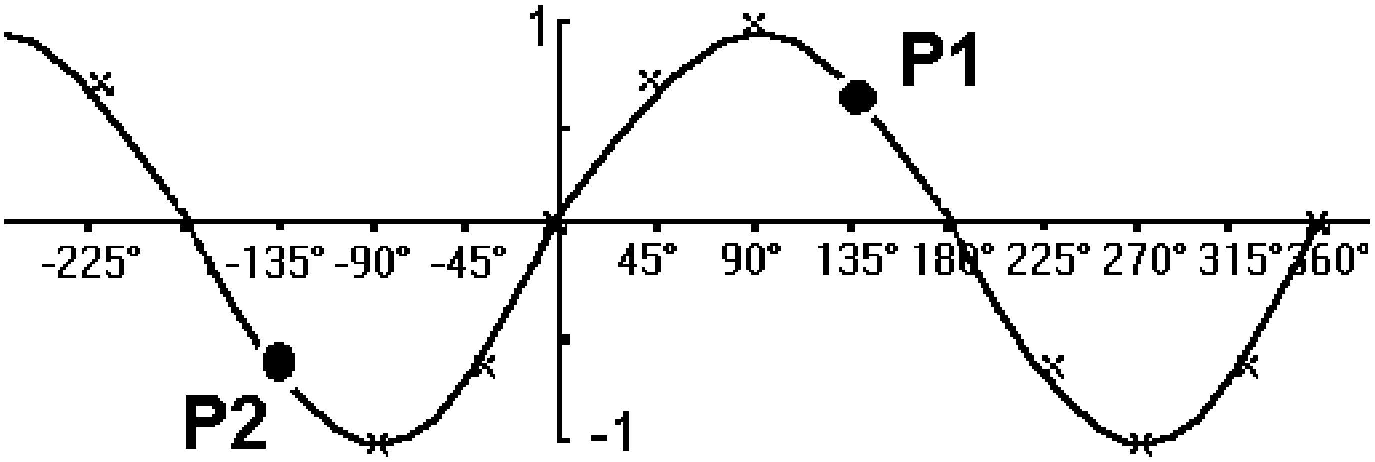
Die Sinusfunktion hat eine Periode von 360°. Das heißt, daß sich die Sinusfunktion ab 360° wiederholt:



■ Die Sinusfunktion ist eine ungerade Funktion

Die Sinusfunktion ist eine ungerade Funktion, d.h ihr Graph liegt punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.

Zum Beispiel erhält man den Punkt 2, wenn man den Punkt 1 am Ursprung (=Punkt 0/0) spiegelt:



Trigonometrie III

ZURÜCK

■ Definition der Cosinusfunktion

Die Definition der Cosinusfunktion erfolgt genau wie die Definition der Sinusfunktion. Wir wollen die einzelnen Schritte trotzdem aufzählen:

❶ Zu Anfang des Kapitels definierten wir den Cosinus am Einheitskreis.

❷ Durch diese Definition wurde eine eindeutig Zuordnung (eindeutige Zuordnung=Funktion) geschaffen, die jedem Winkel genau einen Cosinuswert zuordnet.

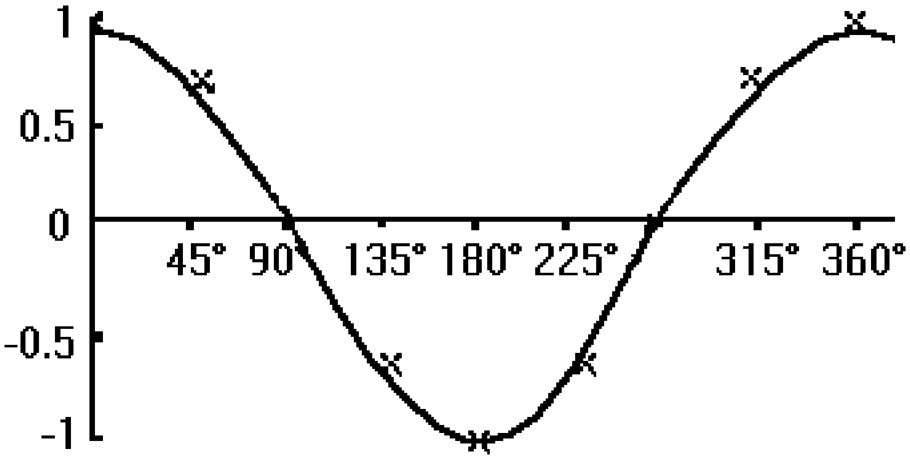
❸ Dieser Funktion geben wir nun den Namen "Cosinusfunktion".

Wir können also festhalten:

Durch die am Anfang des Kapitels gemachte Definition des "Cosinus am Einheitskreis" wird eine Funktion definiert, die man Cosinusfunktion nennt.

■ Der Graph der Cosinusfunktion

Der Graph der Cosinusfunktion hat folgendes Bild:



Im Graph der Cosinusfunktion hat die gleiche Form wie eine nach links verschobene Sinusfunktion. Der verschobenen Sinusfunktion werden wir später noch ein ganzes Kapitel widmen.

Version:Test

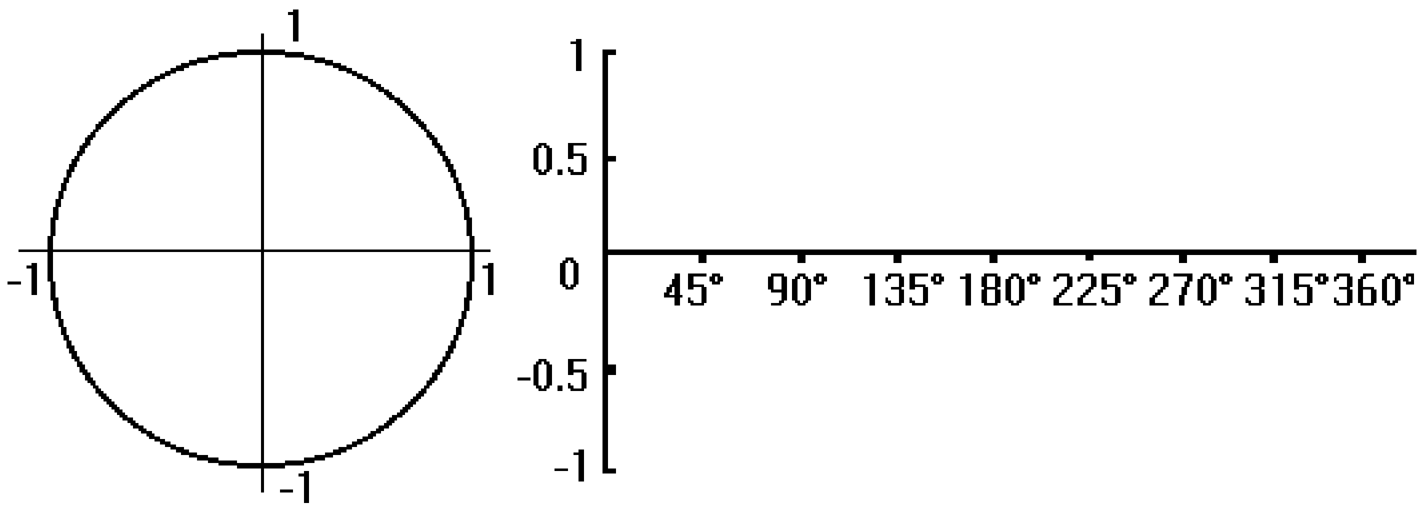
Trigonometrie III

ZURÜCK

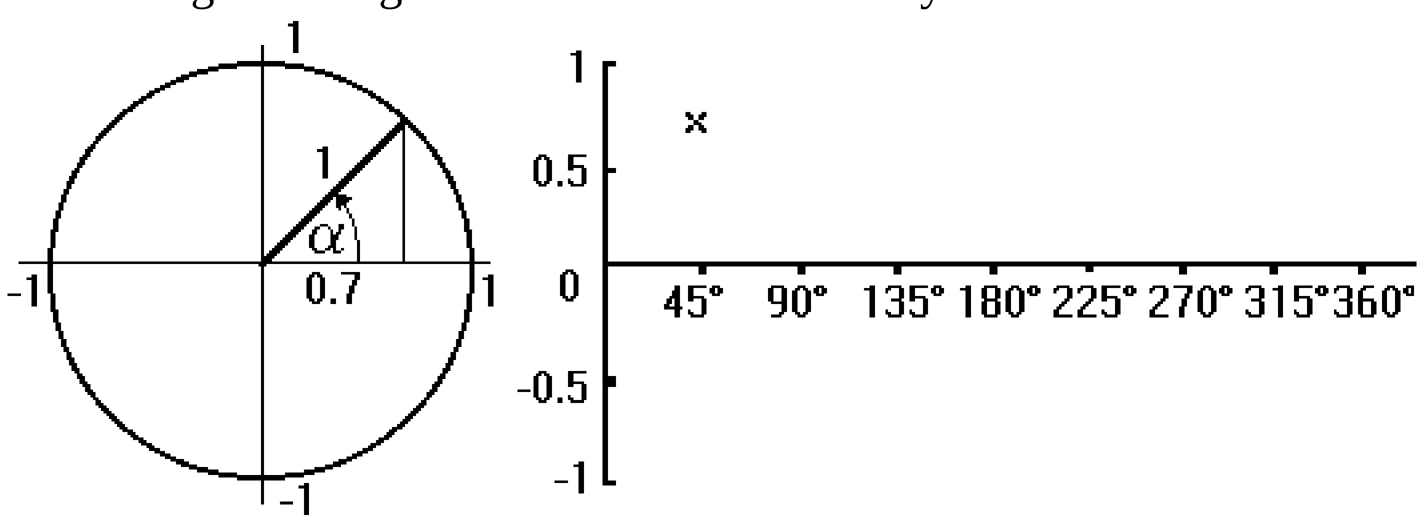
Graph der Cosinusfunktion

■ Veranschaulichung

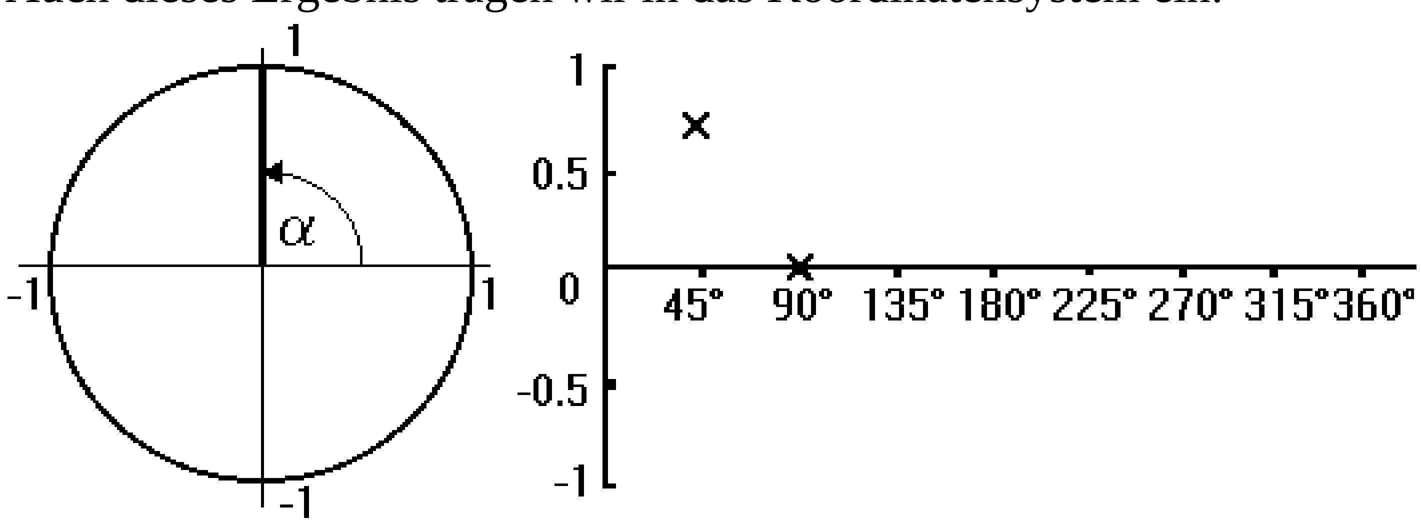
Nun wollen wir zeigen, wie man die Cosinusfunktion zeichnet. Zunächst zeichnen wir einen Einheitskreis und daneben ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die Abszisse beschriften wir mit Gradzahlen, die Ordinate mit Werten zwischen -1 und 1:



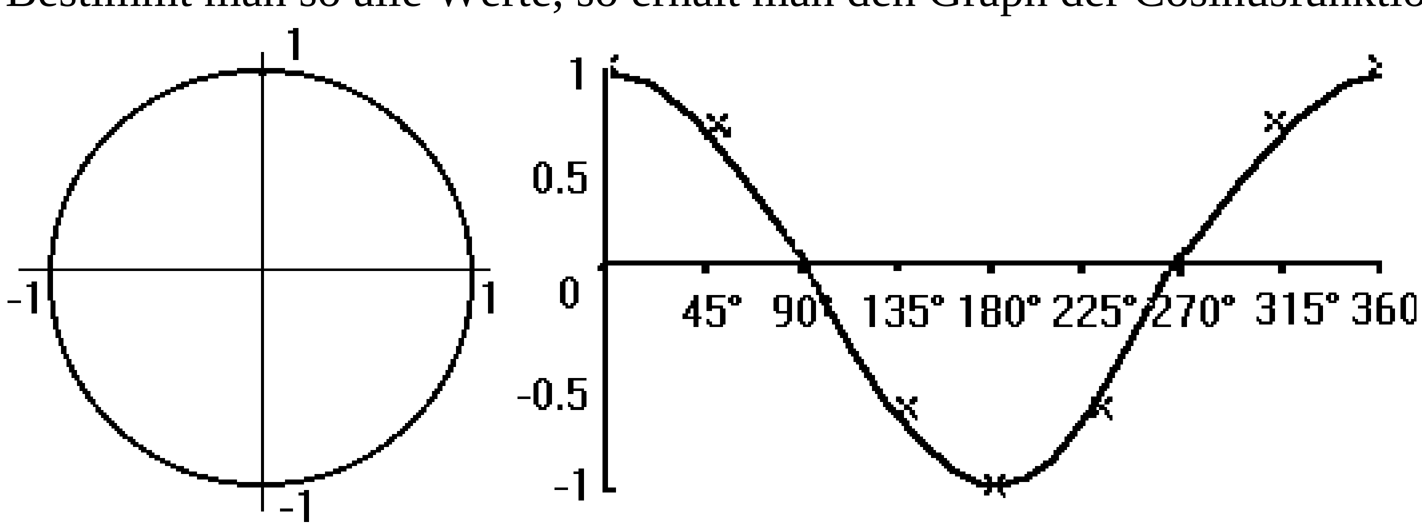
Als erstes Beispiel wählen wir den Winkel α = 45°. Nun bestimmen wir cos 45° am Einheitskreis (durch Messen). Das Ergebnis ist 0,7. Dieses Ergebnis tragen wir in das Koordinatensystem ein:



Als zweites Beispiel bestimmen wir cos 90°. Das Ergebnis ist 0. Auch dieses Ergebnis tragen wir in das Koordinatensystem ein:



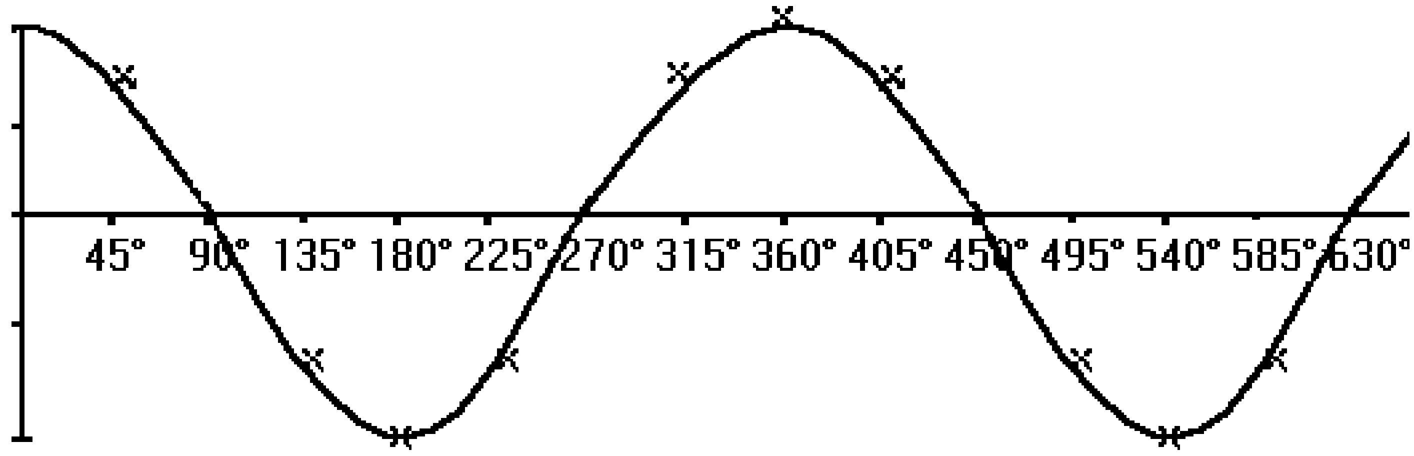
Bestimmt man so alle Werte, so erhält man den Graph der Cosinusfunktion:



Version:Test ©Raddy '99	# Trigonometrie III ZURÜCK
Eigenschaften der Cosinusfunktion	

■ Periodizität von 360°

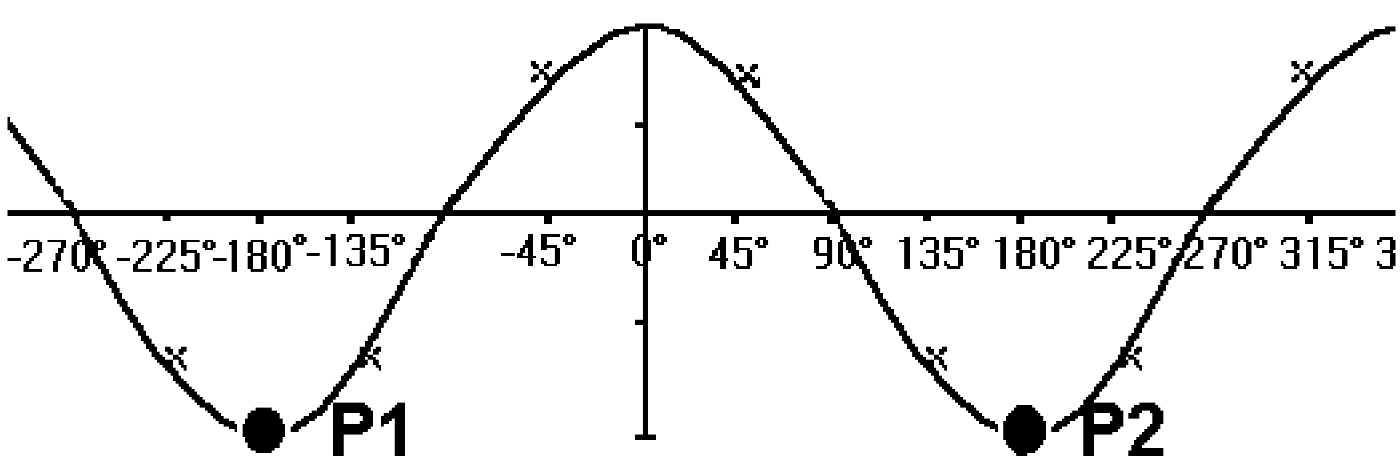
Die Cosinusfunktion hat eine Periode von 360°. Das heißt, daß sich die Cosinusfunktion ab 360° wiederholt:

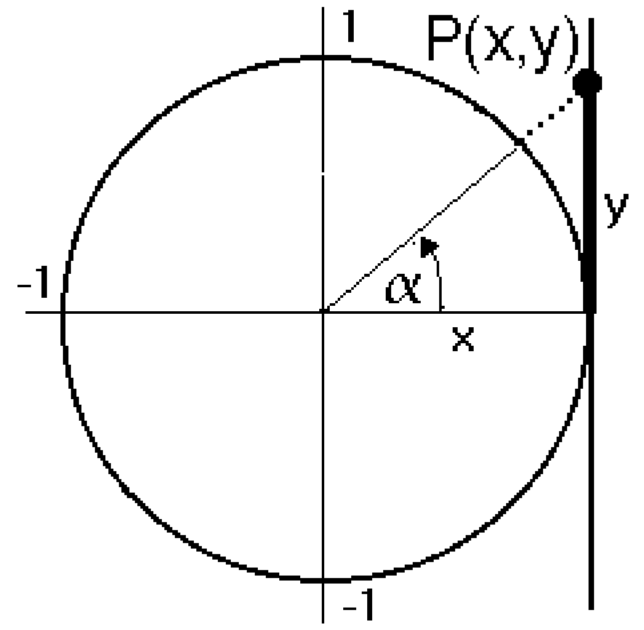
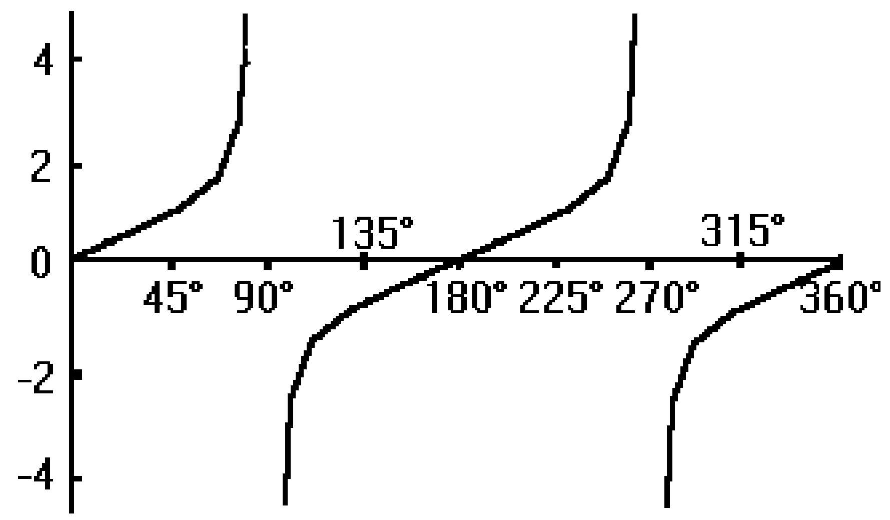
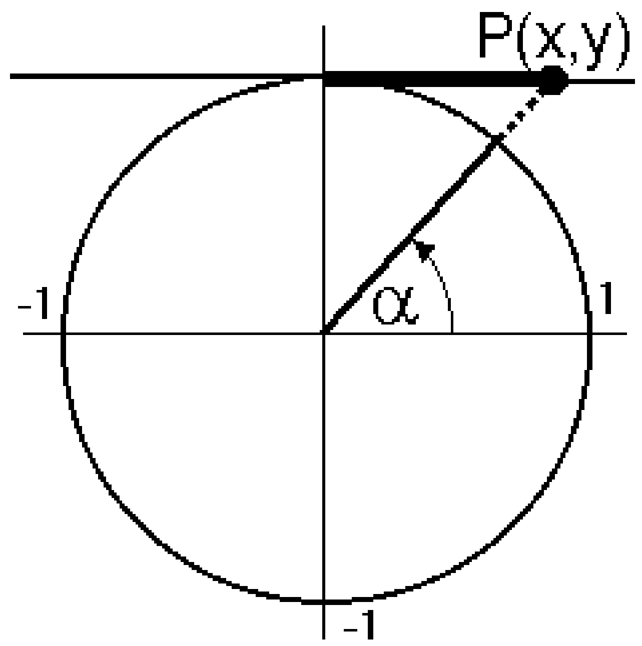
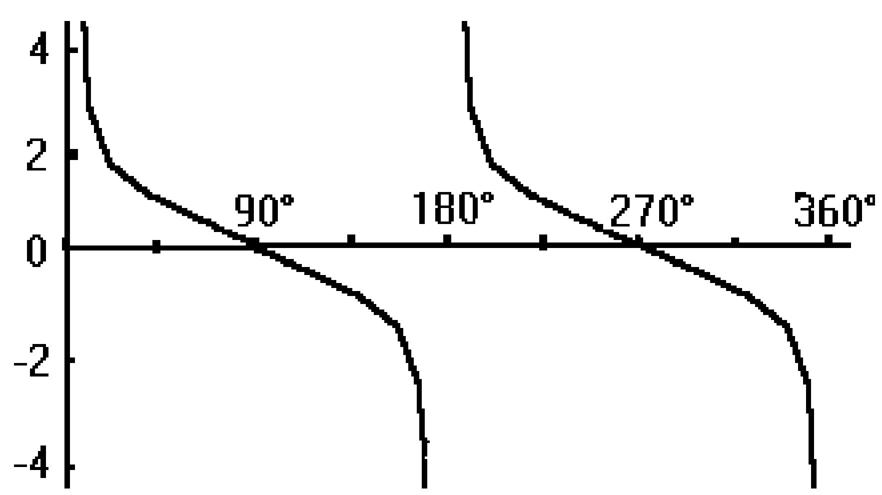


■ Die Cosinusfunktion ist eine gerade Funktion

Die Cosinusfunktion ist eine gerade Funktion, d.h ihr Graph liegt symmetrisch zur y-Achse.

Zum Beispiel erhält man den Punkt 2, wenn man den Punkt 1 an der y-Achse spiegelt:



Version: Test ©Raddy 2000	Inhalt zu: **Trigonometrie IV** ZURÜCK
Info-Seite	Vorkenntnisse: ... Themen: ... Infos: www.mathematik.net
Tangens am Einheitskreis	 Man zeichnet einen Einheitskreis und eine Tangente an den Punkt (1,0). Man dreht den positiven Teil der x-Achse um den Winkel α, und verlängert diese Gerade bis zur Tangente. Die Gerade schneidet die Tangente im Punkt P(x,y). Die y-Koordinate des Punktes P (dick gezeichnet)nennt man Tangens α.
Beispiele	Beispiele
Alte und neue ...	Hier wird die alte Tangens-Definition der neuen gegenübergestellt.
Tangensfunktion	
Konstruktion	Exemplarische Konstruktion mehrerer Punkte der Tangensfunktion
Eigenschaften	Periode von 180°. Definitionslücken: 90°, 270°, 450°, ...
Cotangens am Einheitskreis	 Man zeichnet einen Einheitskreis und eine Tangente an den Punkt (0,1). Man dreht den positiven Teil der x-Achse um den Winkel α, und verlängert diese Gerade bis zur Tangente. Die Gerade schneidet die Tangente im Punkt P(x,y). Die x-Koordinate (dick gezeichnet) des Punktes P nennt man den Tangens α.
Beispiele	Beispiele
Cotangensfunktion	
Konstruktion	Exemplarische Konstruktion eines Punktes der Cotangensfunktion
Eigenschaften	Periode = 180°. Definitionslücken: 0°, 180°, 360°, 450°, ...

Version: Test
©Raddy 2000

Trigonometrie IV

ZURÜCK

Info-Seite

■ Was wird gelernt

Im Kapitel "Trigonometrie II" haben wir die Begriffe Tangens und Cotangens am rechtwinkligen Dreieck definiert.
In diesem Kapitel IV werden wir die Begriffe Tangens und Cotangens auf eine neue Art definieren, und zwar am Einheitskreis.

■ Notwendige Vorkenntnisse

Die Kapitel "Trigonometrie I-III".
Wissen, was eine Funktion ist (siehe z.B. Funktionen I)

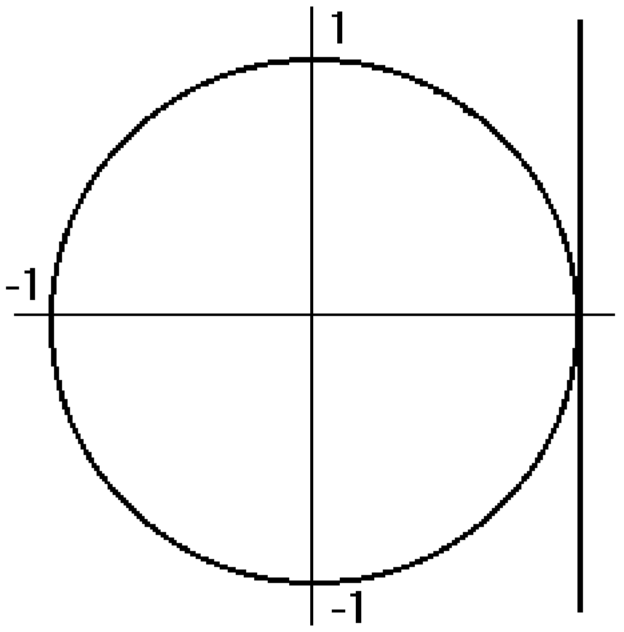
Version: Test
©Raddy 2000

Trigonometrie IV

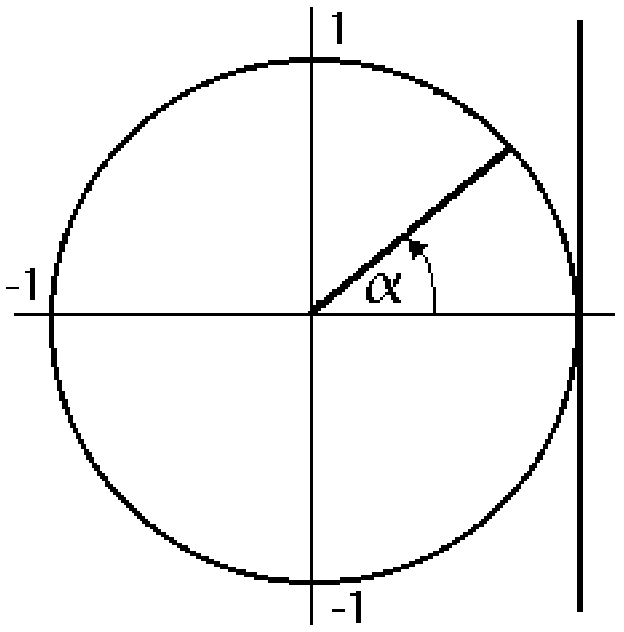
ZURÜCK

Der Tangens am
am Einheitskreis:

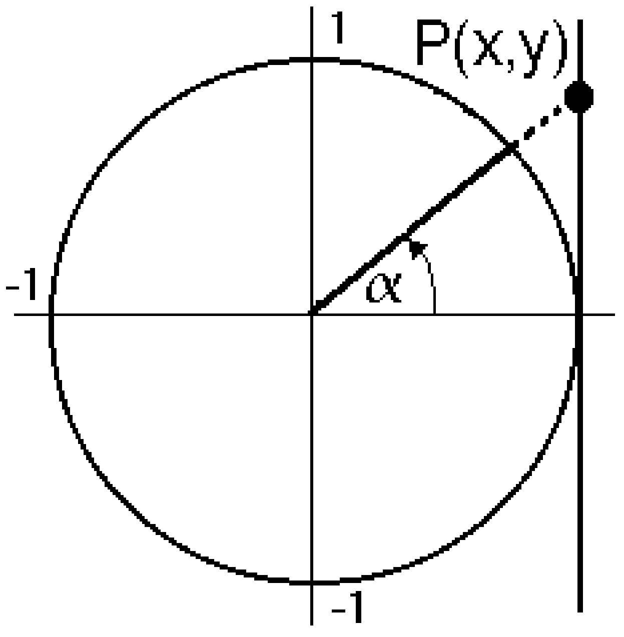
■ Definition des Tangens



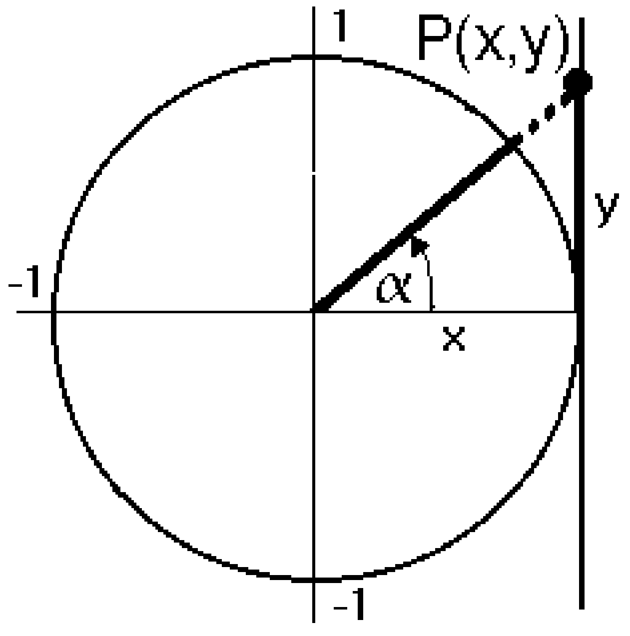
Wir zeichnen einen Einheitskreis und eine Tangente an den Punkt (1,0).



Nun drehen wir den positiven Teil der x-Achse um einen beliebigen Winkel α, im Beispiel um ca. 40°:



Wir verlängern die entstandene Gerade. Sie schneidet die Tangente im Punkt P(x,y).

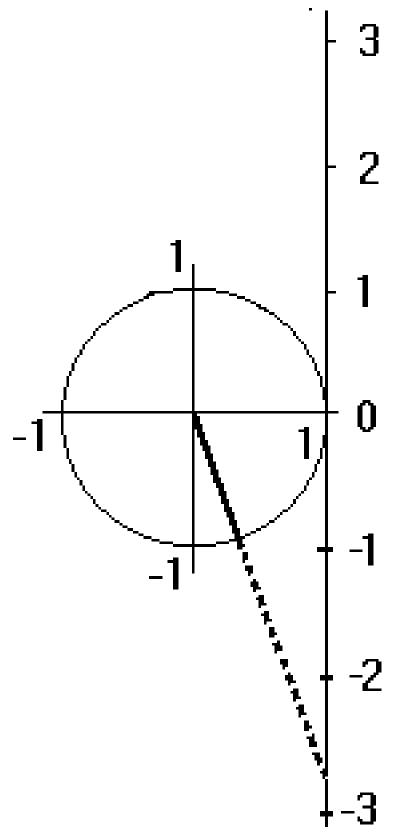


Nun folgt die Definition:
Die y-Koordinate des Punktes P(x,y) nennt man Tangens α.

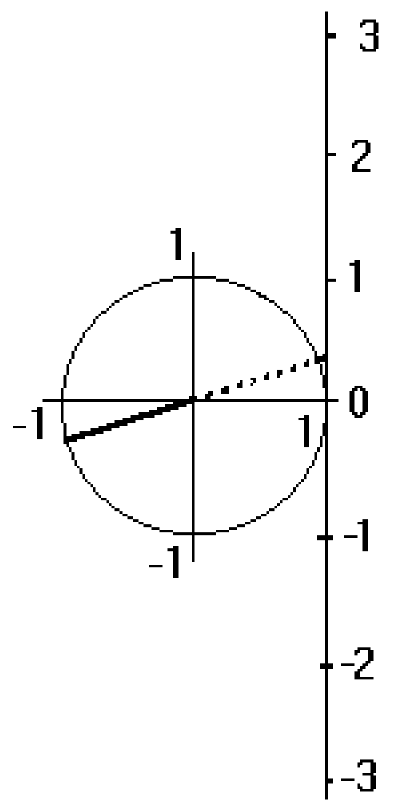
Version: Test ©Raddy 2000	# Trigonometrie IV ZURÜCK

Beispiele

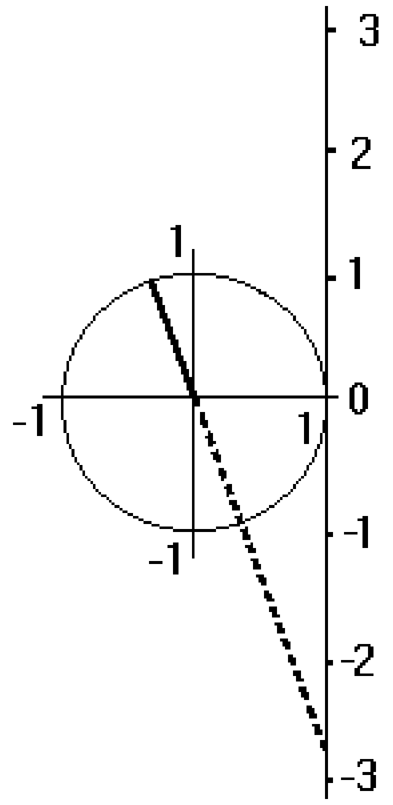
■ Beispiele



Im ersten Beispiel drehen wir den positiven Teil der x-Achse um 290°.
Es entsteht eine Gerade (dick gezeichnet).
Diese Gerade müssen wir nun in Richtung Tangente verlängern (Punktlinie).
Die Punktlinie schneidet bei ca. -2.75 die Tangente Der Tangens von 290° ist also gleich -2.75



Im zweiten Beispiel drehen wir den positiven Teil der x-Achse um 200°.
Es entsteht eine Gerade (dick gezeichnet).
Diese Gerade müssen wir nun in Richtung Tangente (also rückwärts!) verlängern.
Die Verlängerung (Punktlinie) schneidet die Tangente ca. bei 0.36, also ist der Tangens von 200° ca. gleich 0.36.



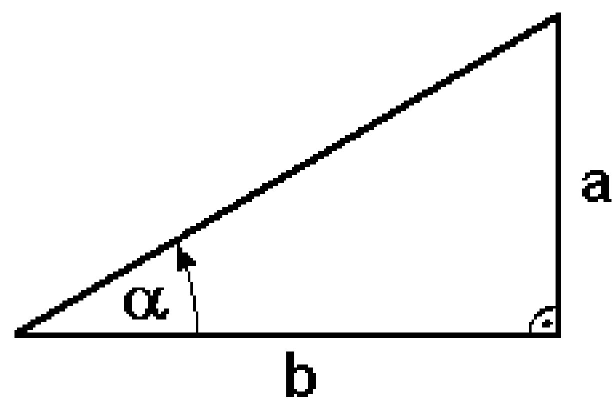
Im dritten Beispiel drehen wir den positiven Teil der x-Achse um 110°.
Es entsteht eine Gerade (dick gezeichnet).
Diese Gerade müssen wir nun wieder in Richtung Tangente (rückwärts) verlängern.
Die Verlängerung (Punktlinie) schneidet die Tangente ca. bei -2,75 , also ist der Tangens von 110° ca. gleich -2.75

Trigonometrie IV

ZURÜCK

Alte und neue Definition

Im Kapitel Trigonometrie II haben wir den "Tangens" bereits am rechtwinkligen Dreieck definiert, und zwar als Seitenverhältnis (Gegenkathete von α : Ankathete von α):



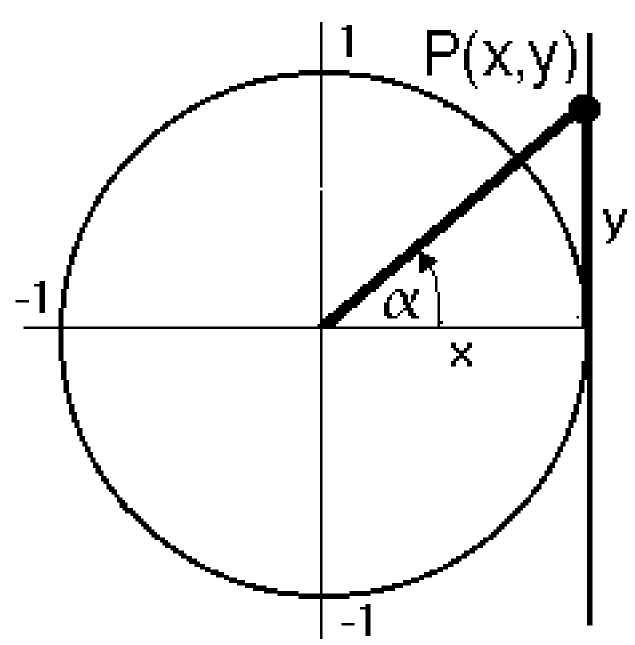
$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

Mit dieser alten Definition des Tangens (am rechtwinkligen Dreieck) kann man nur Winkeln bis 90° einen Tangens zuordnen, weil in einem rechtwinkligen Dreieck eben nur Winkel bis 90° vorkommen.

Die neue Definition des Tangens (Definition am Einheitskreis) ordnet dagegen *jeden* Winkel einen Wert Tangens zu. Die neue Definition ist also eine Erweiterung der alten Definition.

Der Bereich bis 90°

Natürlich dürfen sich alte und neue Definition im gemeinsamen Bereich (also im Bereich bis 90°) nicht wiedersprechen.
Dies wollen wir nun zeigen. Als Beweis wenden wir die *alte* Definition auf das dick eingezeichnete Dreieck an:



$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{y}{1} = y$$

Unter y versteht man aber auch laut neuer Definition den Tangens α.
Alte und neue Definition wiedersprechen sich also nicht.

Trigonometrie IV

■ Die Tangensfunktion

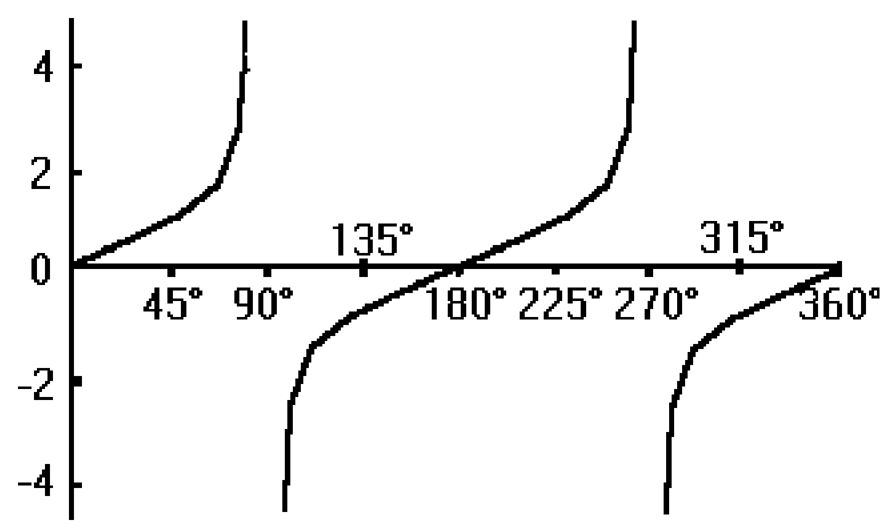
Auf den ersten beiden Seiten dieses Kapitels haben wir den Tangens für beliebige Winkel definiert. Jedem Winkel α haben wir dabei *genau einen* Wert (Tangens α genannt) zugeordnet. Diese Zuordnung ist also eine Funktion:

> Durch die Definition "Tangens am Einheitskreis" wird eine Funktion definiert, die man Tangensfunktion nennt.

■ Graph der Tangensfunktion

Dies ist der Graph der Tangensfunktion. Für Anfänger zeigen wir auf der nächsten Seite nochmals ausführlich, wie der Graph erstellt wird

:

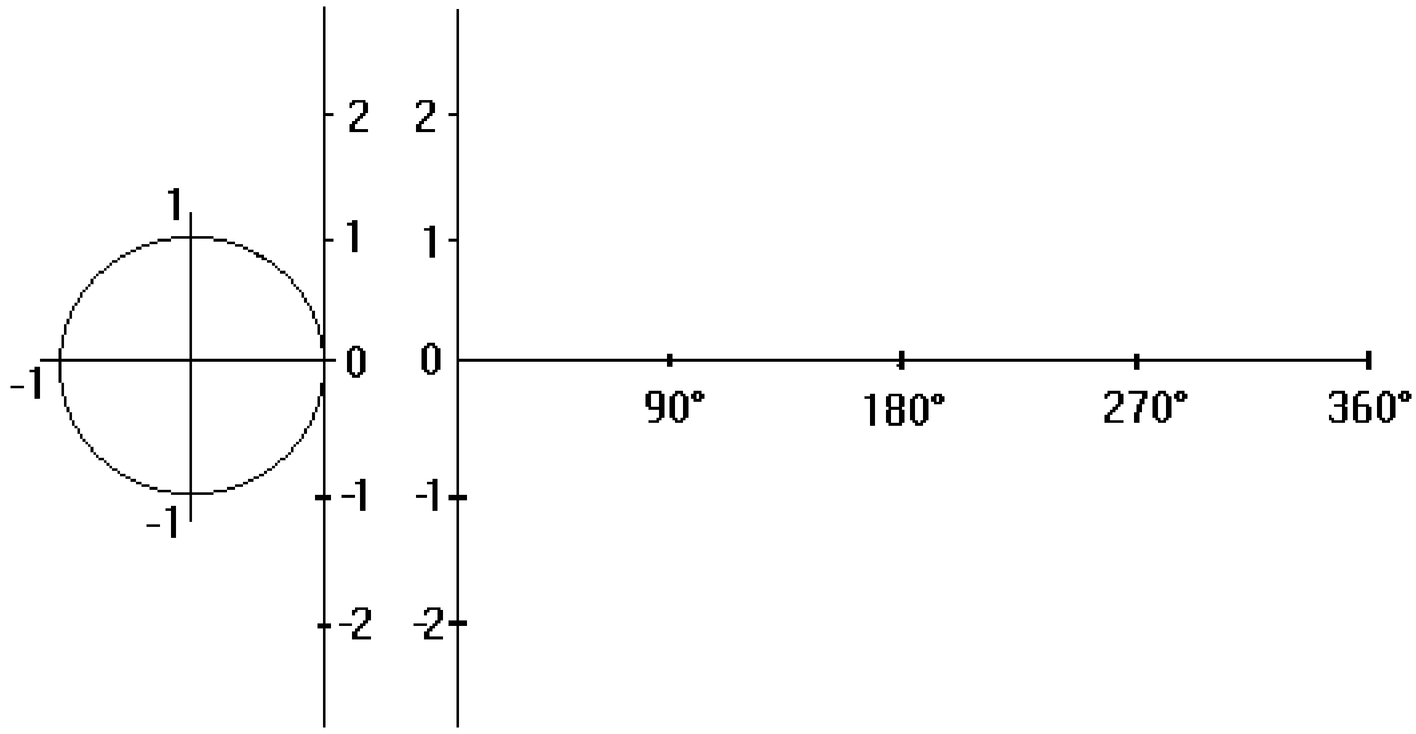


Version: Test ©Raddy 2000	# Trigonometrie IV	ZURÜCK

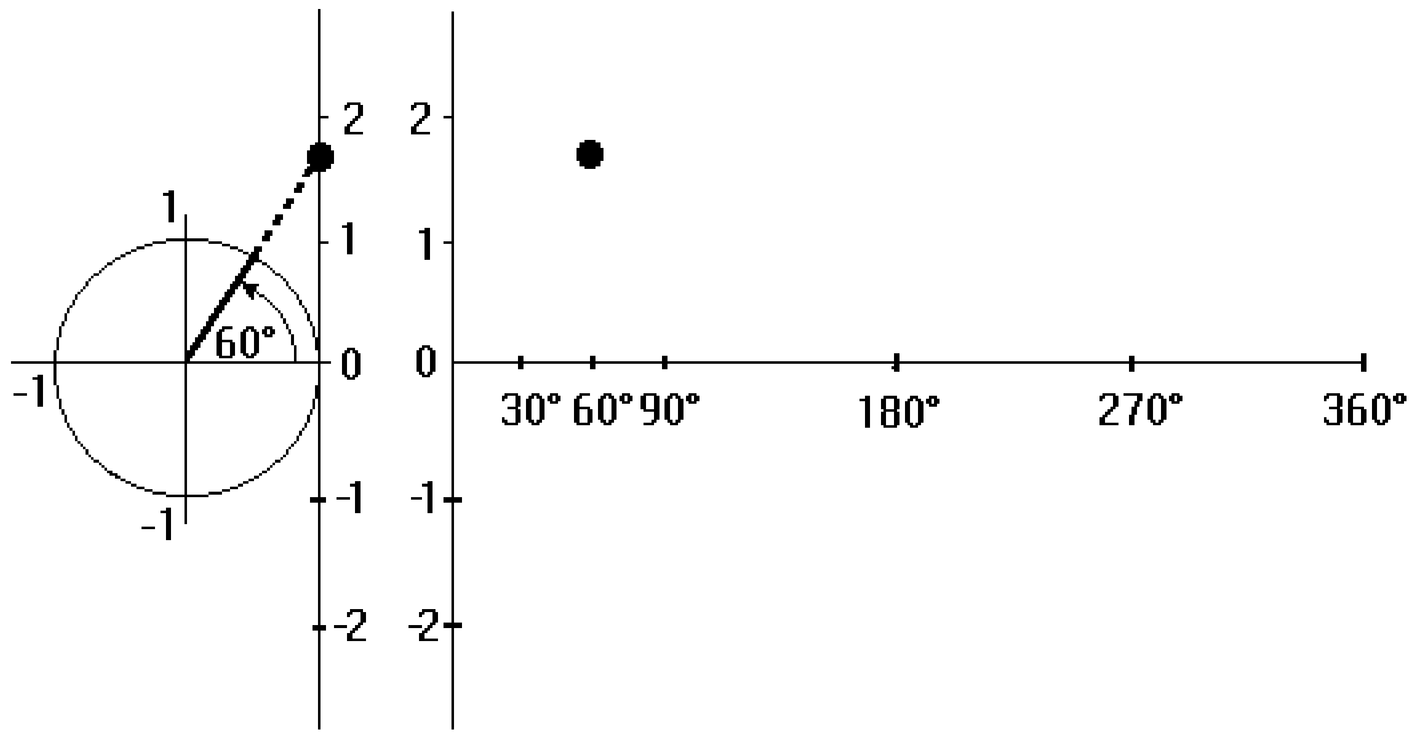
Konstruktion der Tangensfunktion

■ Konstruktion

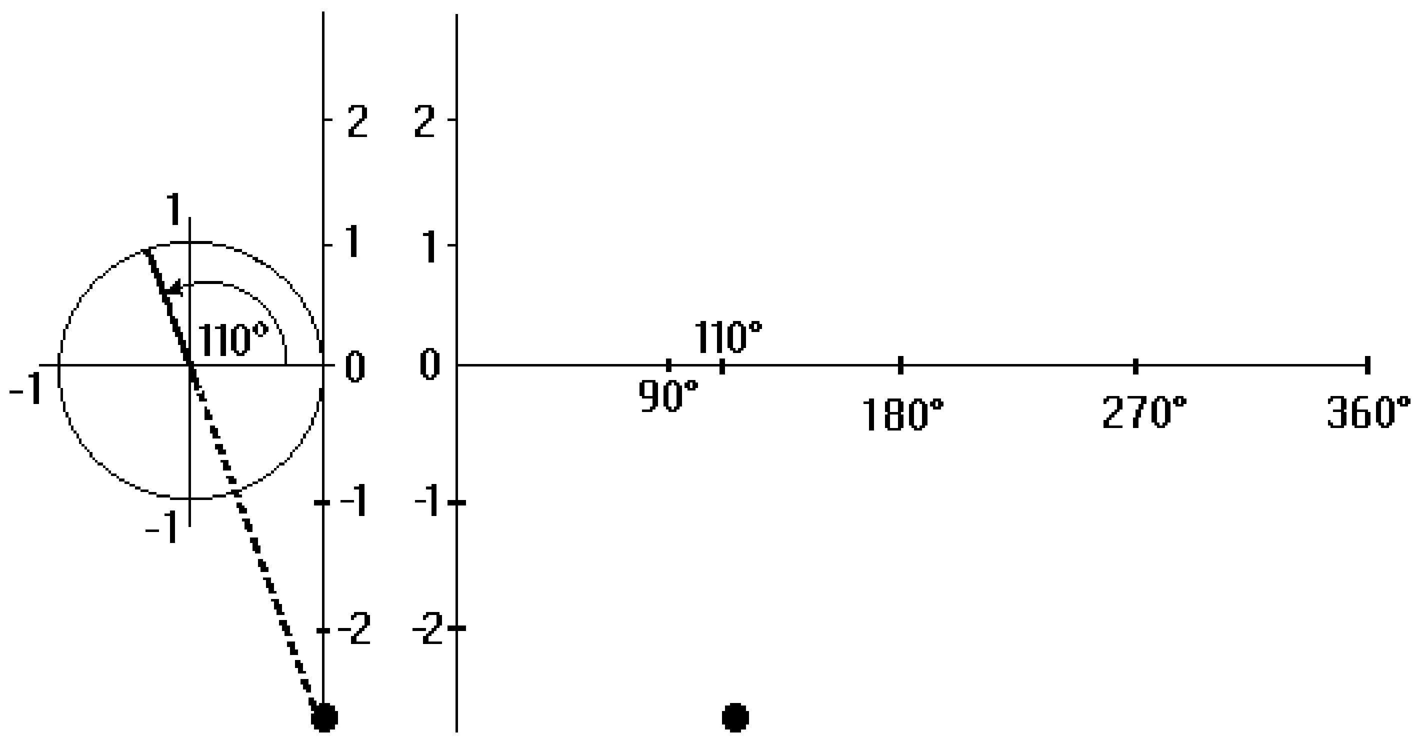
Wir konstruieren nicht die gesamte Tangensfunktion, sondern exemplarisch zwei Punkte. Dazu zeichnen wir zunächst einen Einheitskreis mit Tangente sowie daneben ein rechtwinkliges Koordinatensystem:



Als erstes Beispiel wählen wir den Winkel $\alpha = 60°$. Wir drehen die x-Achse um 60° und messen, wo die Verlängerung die Tangente schneidet. Dies ist ca. bei y=1.7 der Fall. Wir tragen also bei 60° den Wert 1.7 in das Koordinatensystem ein:



Als zweites Beispiel wählen wir $\alpha = 110°$. Wir drehen die x-Achse um 110° und messen wieder, wo die Verlängerung die Tangente schneidet (ca. -2.7). Also tragen wir bei 110° den Wert 2.7 ein:



Version: Test
©Raddy 2000

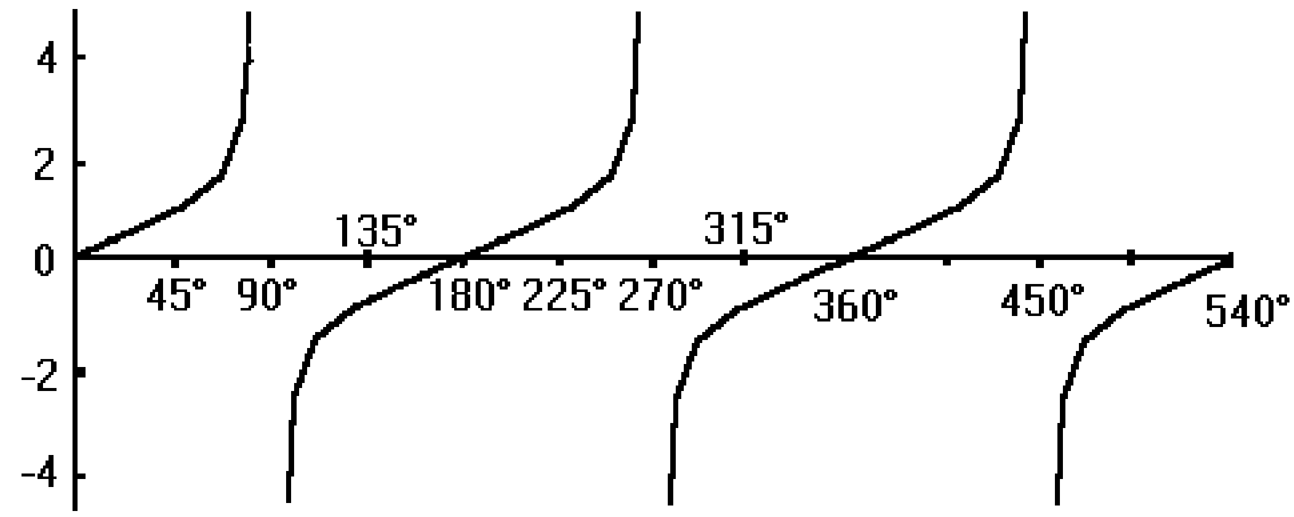
Trigonometrie IV

ZURÜCK

Eigenschaften der Tangens-funktion

■ Periodizität von 180°

Im Gegensatz zur Sinus- und Cosinusfunktion hat die Tangensfunktion keine Periode von 360°, sondern sie nur eine Periode von 180°.
Auf deutsch heißt dies, das sich die Funktion nach jeweils 180° wiederholt:

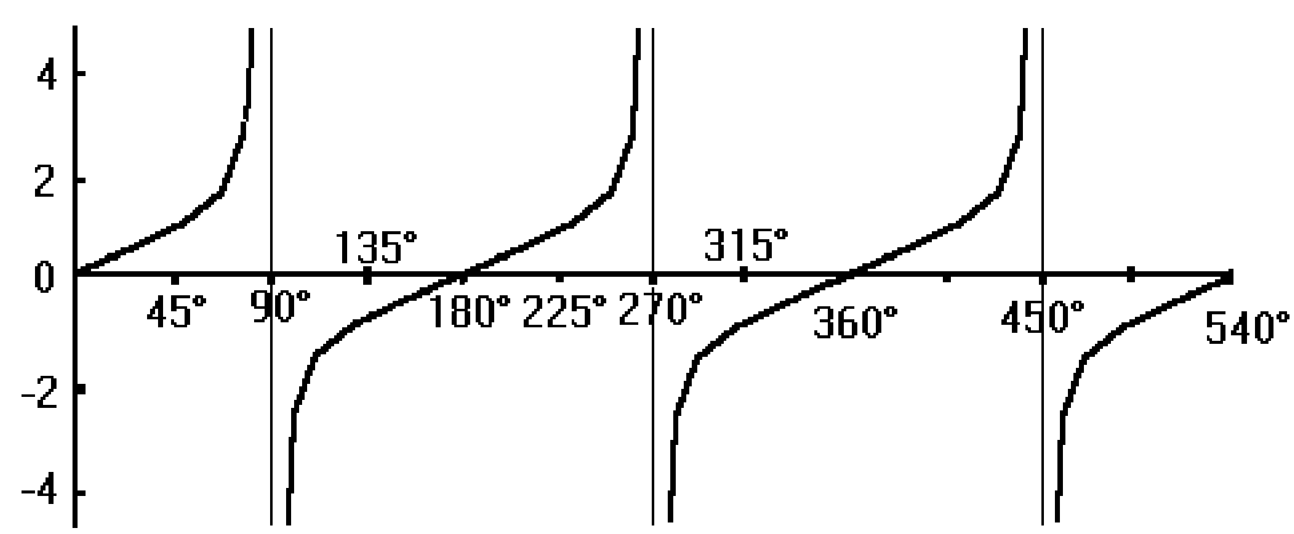


■ Definitionslücken

Die Tangensfunktion hat im Bereich 0° bis 360° die zwei Definitionslücken 90° und 270°. Das heißt, daß man für diese beiden Winkel keinen Tangens angeben kann.
Tipt man z.B. in den Taschenrechner den Wert 90° ein und dann auf die Taste "Tangens", so erscheint "nicht definiert", oder eine ähnliche Fehler-Meldung (oft ein umgekehrtes "E").

■ Asymptoten

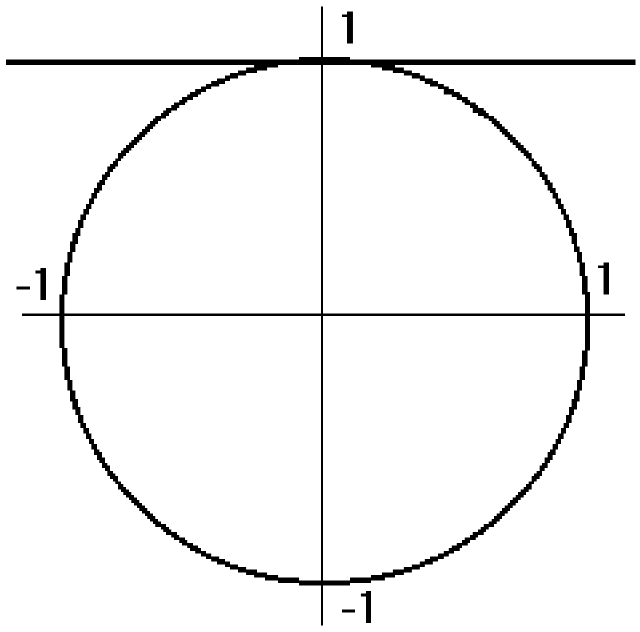
Kurz vor und nach den Definitionslücken strebt die Kurve der Tangensfunktion gegen unendlich, d.h. ihre Werte werden unendlich groß bzw. nach der Definitionslücke unendlich klein. Dabei nähert sich die Kurve der sogenannten Asymptote. Unter einer Asymptote versteht man (in diesem Fall) eine Gerade, die senkrecht durch die Definitionslücken geht:



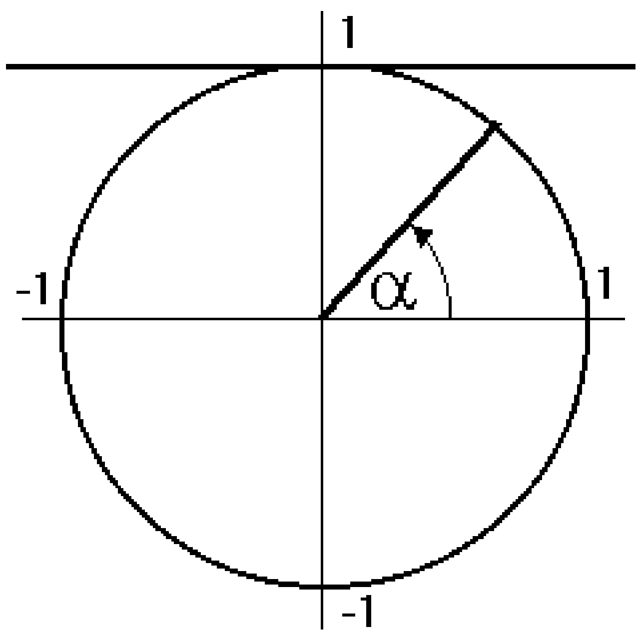
Version: Test ©Raddy 2000	# Trigonometrie IV ZURÜCK

Der Cotangens am Einheitskreis:

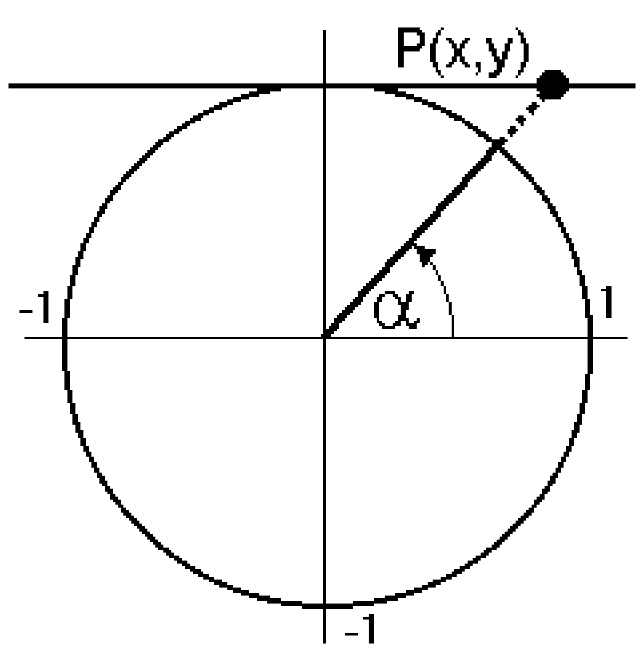
■ Definition des Cotangens



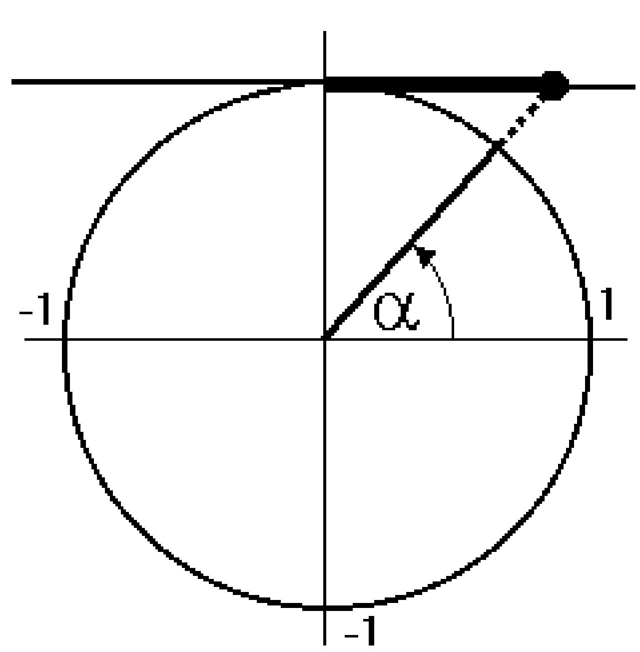
Wir zeichnen einen Einheitskreis und eine Tangente an den Punkt (0,1).



Nun drehen wir den positiven Teil der x-Achse um einen beliebigen Winkel α, im Beispiel um ca. 50°:



Wir verlängern die entstandene Gerade. Sie schneidet die Tangente im Punkt P(x,y).



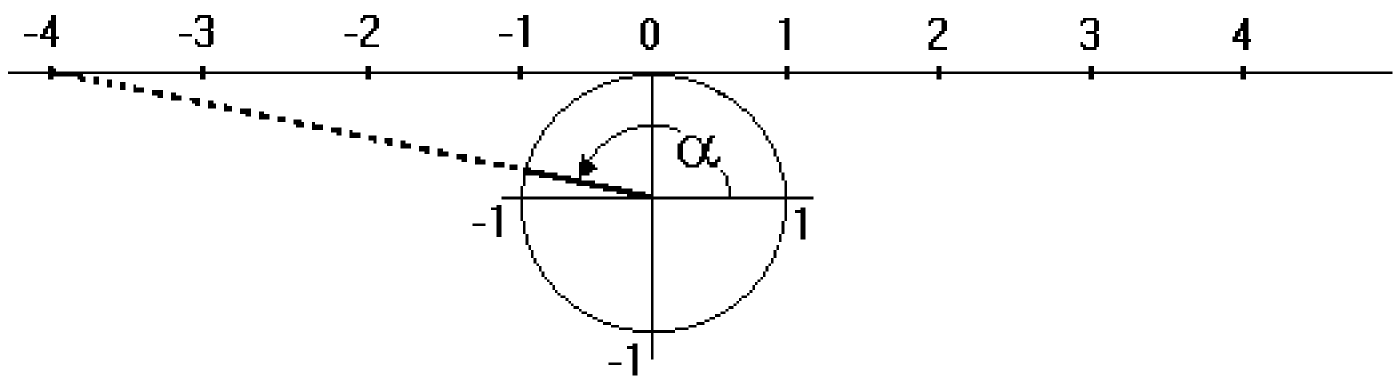
Nun folgt die Definition:
Die x-Koordinate (dick gezeichnet) des Punktes P(x,y) nennt man den Cotangens α.

Version: Test ©Raddy 2000	# Trigonometrie IV ZURÜCK

Beispiele zur Definition des Cotangens

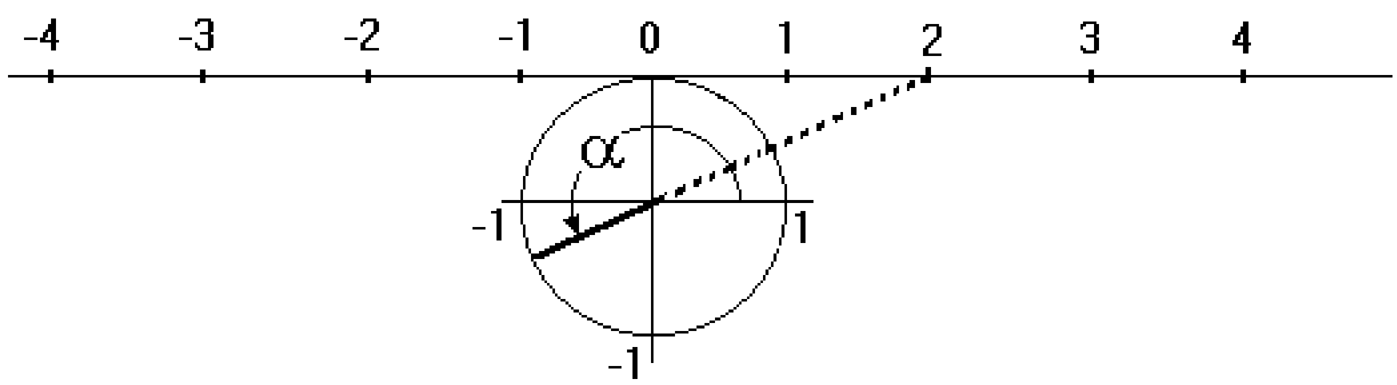
■ Beispiel 1

Im ersten Beispiel drehen wir den positiven Teil der x-Achse um den Winkel α=166°. Es entsteht eine Gerade (dick gezeichnet). Diese Gerade müssen wir nun in Richtung Tangente verlängern (Punktlinie). Die Punktlinie schneidet ca. bei x=-4 die Tangente. Der Cotangens von 166° ist also gleich -4.



■ Beispiel 2

Im zweiten Beispiel drehen wir den positiven Teil der x-Achse um den Winkel α=207°. Es entsteht eine Gerade (dick gezeichnet), Diese Gerade müssen wir nun in Richtung Tangente verlängern (Punktlinie). Die Punktlinie schneidet ca. bei x=2 die Tangente. Der Cotangens von 207° ist also gleich 2.



Version: Test
©Raddy 2000

Trigonometrie IV

ZURÜCK

Cotangens-
funktion

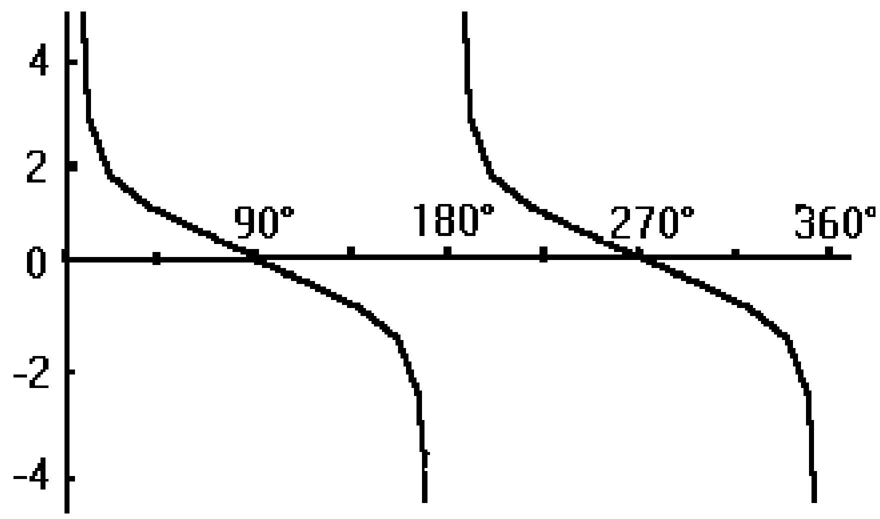
■ Die Cotangensfunktion

Auf den letzten beiden Seiten haben wir den Tangens für beliebige Winkel definiert. Jedem Winkel α haben wir dabei *genau einen* Wert (Cotangens α genannt) zugeordnet. Diese Zuordnung ist also eine Funktion:

Durch die Definition "Cotangens am Einheitskreis" wird eine Funktion definiert, die man Cotangensfunktion nennt.

■ Graph der Cotangensfunktion

Dies ist der Graph der Cotangensfunktion. Für Anfänger zeigen wir auf der nächsten Seite nochmals ausführlich, wie der Graph erstellt wird:



Version: Test
©Raddy 2000

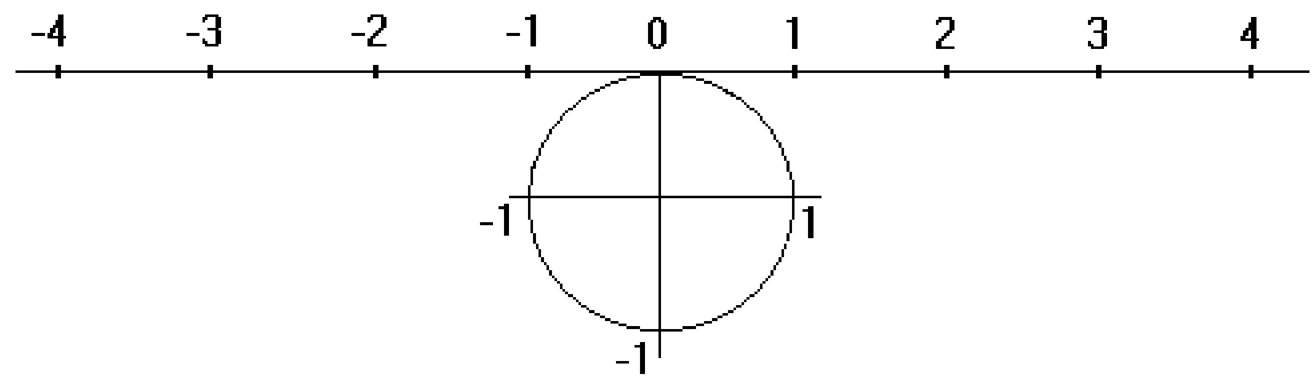
Trigonometrie IV

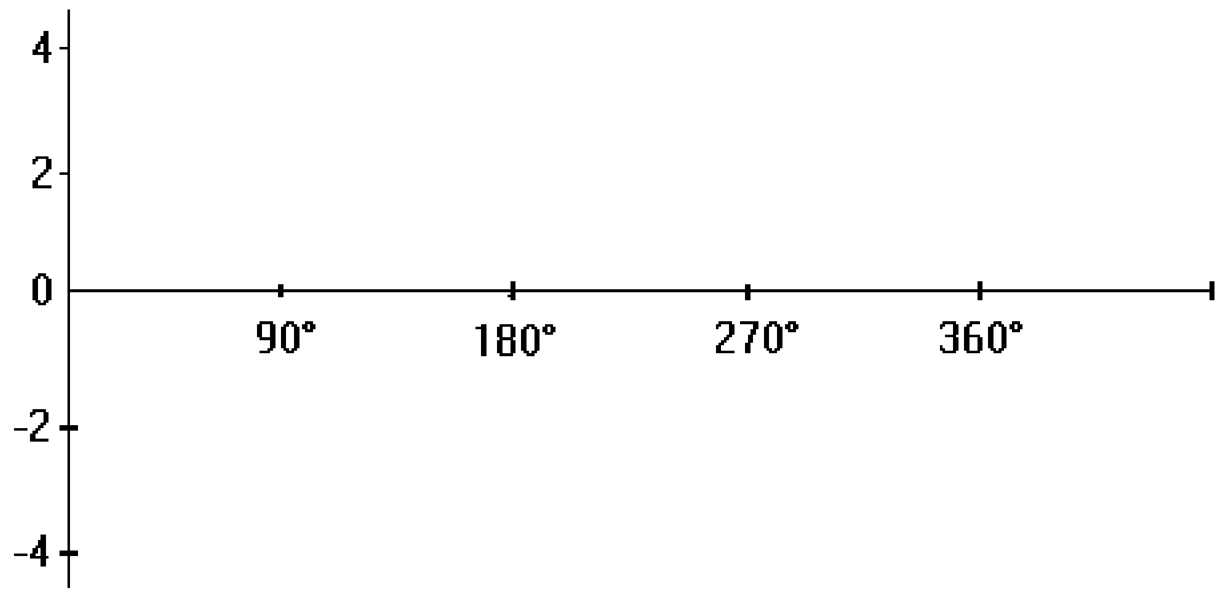
ZURÜCK

Konstruktion der Cotangens-funktion

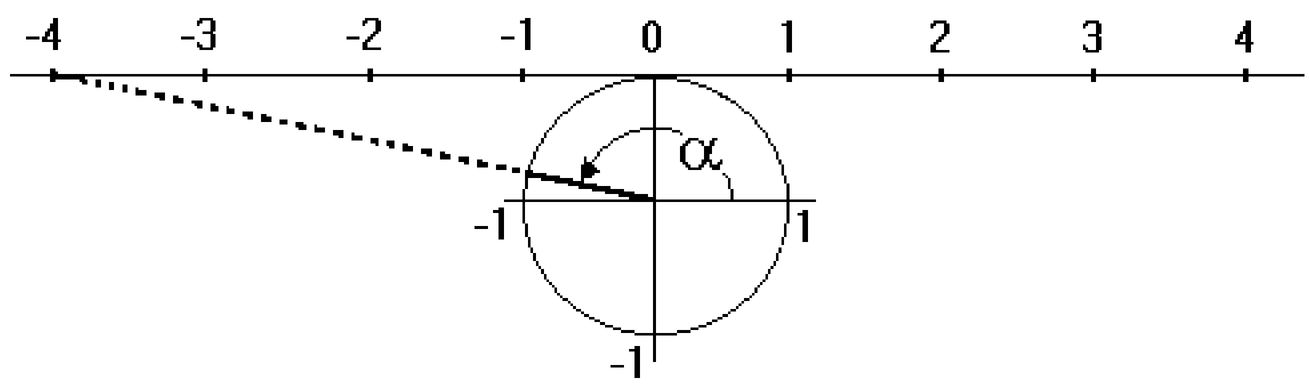
■ Ein Beispiel

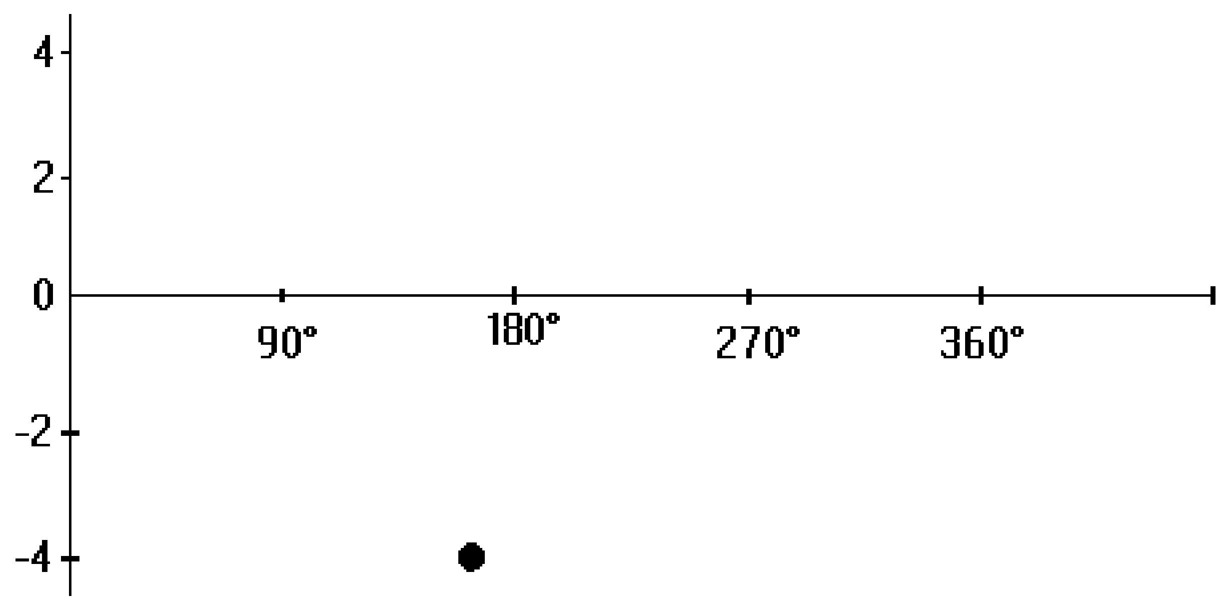
Wir konstruieren nicht die gesamte Cotangensfunktion, sondern exemplarisch einen Punkt. Dazu zeichnen wir zunächst einen Einheitskreis mit Tangente sowie darunter ein rechtwinkliges Koordinatensystem:





Als Beispiel wählen wir den Winkel α = 166°. Wir drehen die x-Achse um 166° und messen, wo die Verlängerung die Tangente schneidet. Dies ist ca. bei x= -4 der Fall. Wir tragen also bei 166° den Wert -4 in das Koordinatensystem ein:



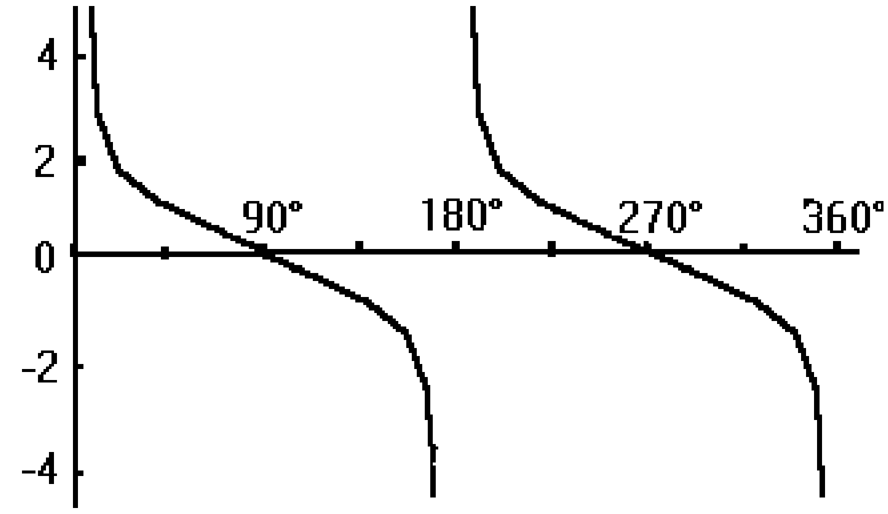


Version: Test ©Raddy 2000	# Trigonometrie IV ZURÜCK

Eigenschaften der Cotangens-funktion

■ Periodizität von 180°

Die Cotangsfunktion hat (wie die Tangensfunktion) eine Periode von 180°. Die Funktion wiederholt sich also nach jeweils 180°:

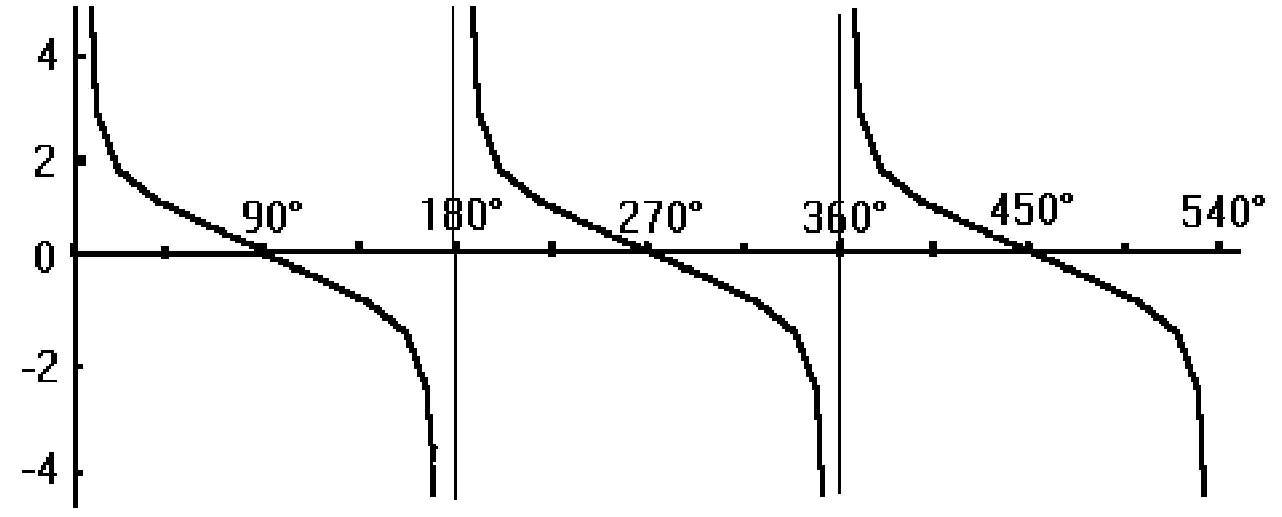


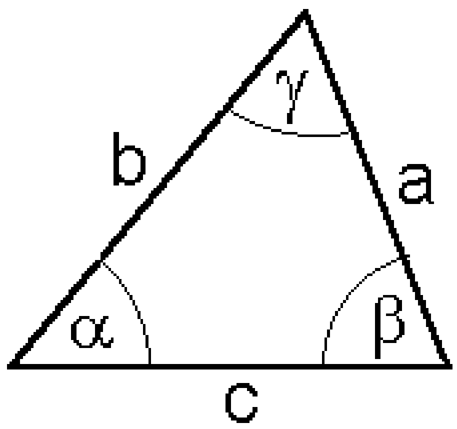
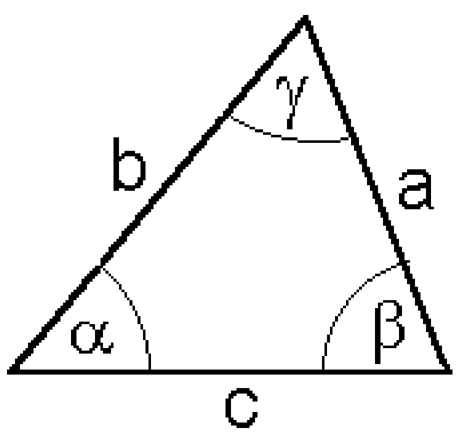
■ Definitionslücken

Die Cotangensfunktion hat (wie die Tangensfunktion) nach je 180° eine Definitionslücke, jedoch liegen diese bei 0°, 180°, 360°, ...
Das heißt, daß man für diese Winkel keinen Cotangens angeben kann.
Tipt man z.B. in den Taschenrechner den Wert 180° ein und dann auf die Taste "Cotangens", so erscheint "nicht definiert", oder eine ähnliche Fehler-Meldung (oft ein umgekehrtes "E").

■ Asymptoten

Kurz vor und nach den Definitionslücken strebt die Kurve der Cotangensfunktion gegen unendlich, d.h. die Werte werden unendlich groß bzw. nach der Definitionslücke unendlich klein. Dabei nähert sich die Kurve der sogenannten Asymptote. Unter einer Asymptote versteht man (in diesem Fall) eine Gerade, die senkrecht durch die Definitionslücken geht:



Version: Test ©Raddy 2000	Inhalt zu: **Trigonometrie V** ZURÜCK
Info-Seite	Vorkenntnisse: ... Themen: ... Infos: www.mathematik.net
Trigonometrischer Pythagoras	$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
Sinussatz	Der Sinussatz dient (neben dem Cosinussatz) dem Berechnen von rechtwinkligen Dreiecken. Gegeben sei ein beliebiges Dreieck:  In diesem Dreieck (und allen anderen) gilt der Sinussatz: $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
Ein Beispiel	Ein einfaches Beispiel zur Anwendung des Sinussatzes
Beweis	Der Beweis des Sinussatzes
Cosinussatz	Der Cosinussatz dient (neben dem Sinussatz) dem Berechnen von rechtwinkligen Dreiecken. Gegeben sei ein beliebiges Dreieck:  In diesem Dreieck (und allen anderen) gilt der Cosinussatz: $$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$
Ein Beispiel	Ein einfaches Beispiel zur Anwendung des Sinussatzes
Beweis	Der Beweis des Cosinussatzes
Aufgabentypen	Eine Tabelle mit möglichen Aufgabenstellungen und Lösungswegen dazu.

Trigonometrie V

ZURÜCK

Notwendige Vorkenntnisse

Für dieses Kapitel sind die Kenntnisse aus den Kapitels I-IV notwendig. Insbesondere der Winkelsummensatz aus Kapitel I wird oft benutzt.

Themen des Kapitels

Zuerst lernen wir den sogenannten "trigonometrischen Pythagoras" kennen. Dann folgt der Sinus und der Cosinussatz, inclusiv den Beweisen und Beispielen.

Am Ende des Kapitels sind in einer Tabelle alle Aufgaben-stellungen aufgeführt, die beim Lösen von Dreiecken auftreten, und natürlich die passenden Lösungswege dazu.

Version: Test

Trigonometrie V

ZURÜCK

Trigonometrischer Pythagoras

Satz

Den folgenden Satz nennt man den "trigonometrischen Pythagoras":

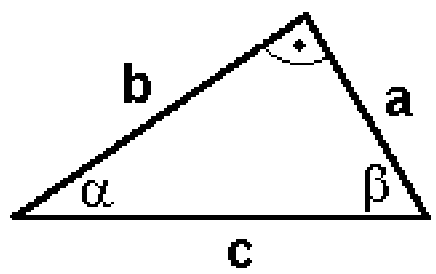
$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

<u>Anmerkung</u>:
Der Ausdruck $\sin^2\alpha$ ist die übliche Schreibweise für $(\sin\alpha)^2$

Beweis des Satzes

Den "normalen" Satz des Pythagoras kennen wir aus Kapitel I :

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Nun gelten im abgebildeten Dreieck u.a. folgende zwei Formeln:

❶ $a = \sin\alpha \cdot c$ (weil $\sin\alpha = a:c$)

❷ $b = \cos\alpha \cdot c$ (weil $\cos\alpha = b:c$)

Wir setzen die gefundenen Werte für a und b in den Satz des Pythagoras ein:

$$(\sin\alpha \cdot c)^2 + (\cos\alpha \cdot c)^2 = c^2$$

Die beiden Klammern müssen wir auflösen:

$$\sin^2\alpha \cdot c^2 + \cos^2\alpha \cdot c^2 = c^2$$

Nun müssen wir c^2 ausklammern und kürzen:

$$c^2 \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = c^2$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Die letzte Gleichung ist bereits der trigonometrische Pythagoras, den wir beweisen wollten.

Version: Test ©Raddy 2000	# Trigonometrie V ZURÜCK

Der Sinussatz

■ Vorbemerkung

Bis jetzt haben wir nur rechtwinklige Dreiecke berechnet.
In diesem Kapitel wollen wir nun beliebige Dreieck berechnen.

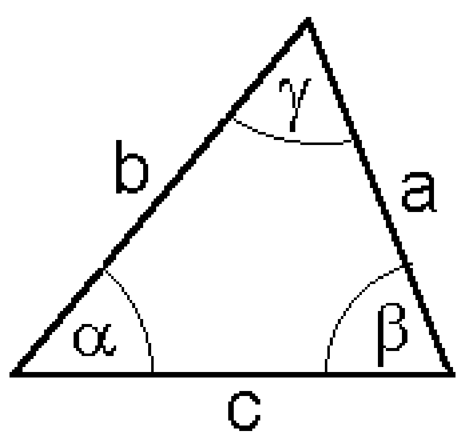
Um beliebige Dreiecke zu berechnen braucht man den Sinus- und den Cosinussatz. Welchen der beiden Sätze man jeweils benutzen muß hängt davon ab, welche Seiten und Winkel gegeben sind. Manchmal muß man sogar beide Sätze benutzen.

■ Der Sinussatz

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}}$$

■ Bild zum Sinussatz

Die obige Formel gilt natürlich nur, wenn man die Seiten und Winkel so bezeichnet, wie es in der Geometrie üblich ist: Der Seite a liegt der Winkel α gegenüber, der Seite b liegt der Winkel β gegenüber, und der Seite c liegt γ gegenüber:



■ Alternative Schreibweise des Satzes

Stellt man die Formel des Sinussatz um, so erhält man:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Da nun die Seiten und die Winkel ins Verhältnis gesetzt sind, kann man den Sinussatz nun "sprachlich elegant" formulieren:

Die Seiten verhalten sich zueinander wie die Winkel.

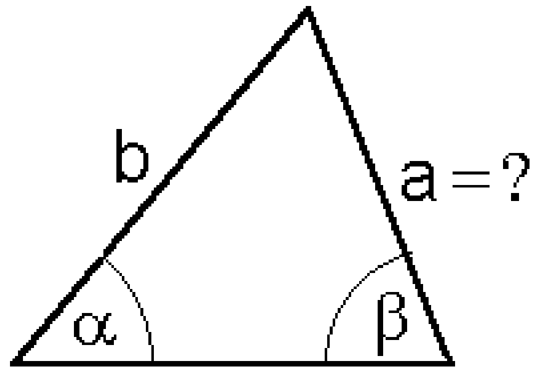
Trigonometrie V

ZURÜCK

Einführendes Beispiel zum Sinussatz

■ Beispiel

Nun wollen wir an einem Beispiel demonstrieren, wie man den Sinussatz einsetzt. Gegeben sei das folgende Dreieck, in dem die Seite a unbekannt ist:



$$b = 3.6\text{ cm}$$
$$\alpha = 50°$$
$$\beta = 70°$$
$$a = ?$$

Zur Lösung benutzen wir den Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Nun müssen wir den Sinussatz nach der gesuchten Seite a umstellen:

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot b$$

und dann die gegebenen Werte einsetzen:

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot b = \frac{\sin 50°}{\sin 70°}\cdot 3.6\text{cm} = \underline{\underline{2.9\text{cm}}}$$

<u>Ergebnis</u>: Die gesuchte Seite a hat eine Länge von ca. 2.9cm.

Trigonometrie V

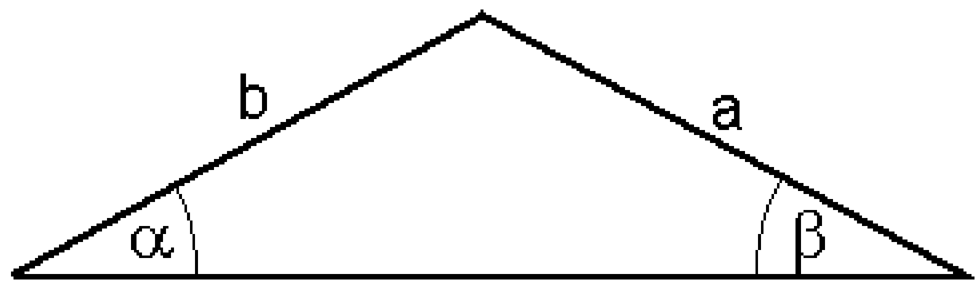
ZURÜCK

Beweis des
Sinussatz

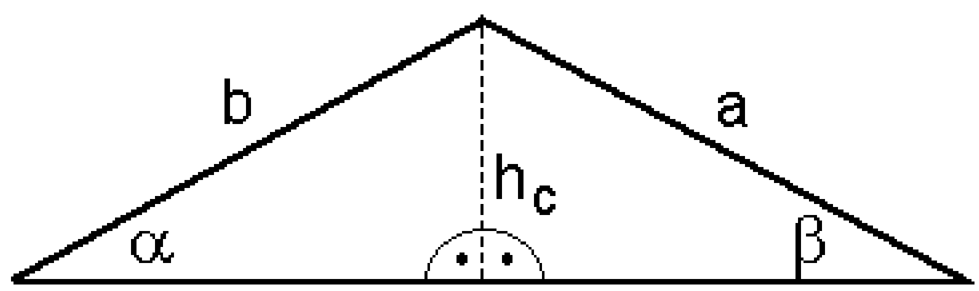
■ Der Beweis des Sinussatzes

Auf dieser Seite wollen wir den Sinussatz beweisen.
Der Beweis des Sinussatz ist sehr einfach aufgebaut.

Gegeben sei das folgende Dreieck:



In dieses Dreieck zeichnen wir die Höhe h_c ein.
Dadurch entstehen zwei rechwinklige Dreiecke.



Für die beiden rechtwinkligen Dreiecke gelten die folgenden Beziehungen:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{h_c}{a}$$

Wir stellen beide Gleichungen nach h_c um:

$$\sin\alpha \cdot b = h_c$$

$$\sin\beta \cdot a = h_c$$

Dadurch können wir die beiden Gleichungen gleichsetzen:

$$\sin\alpha \cdot b = \sin\beta \cdot a$$

Nun müssen wir die Gleichung nur noch umformen, und erhalten den Sinussatz in der uns bekannten Form:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Trigonometrie V

■ Vorbemerkung zum Cosinussatz

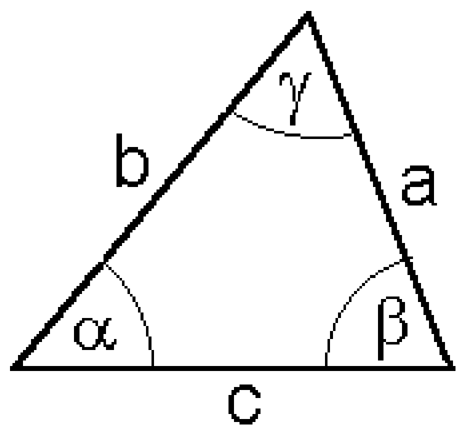
Um ein Dreieck zu berechnen, braucht man neben dem Sinussatz auch manchmal den sogannten Cosinussatz.
Er findet immer dann Anwendung, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

■ Der Cosinussatz

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$$

■ Bild zum Satz

Die obige Formel gilt natürlich nur, wenn man die Seiten und Winkel so bezeichnet, wie es in der Geometrie üblich ist:
Der Seite a liegt der Winkel α gegenüber, der Seite b liegt der Winkel β gegenüber, und der Seite c liegt γ gegenüber:



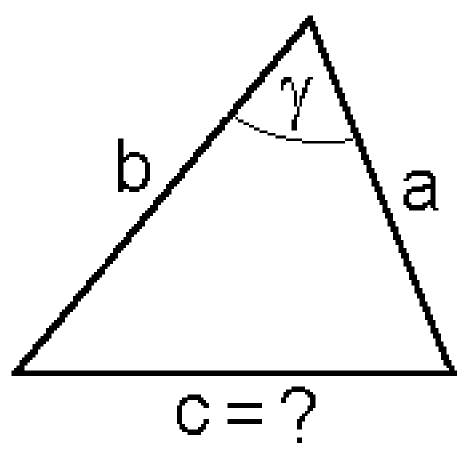
Version: Test

Trigonometrie V

ZURÜCK

■ Beispiel zum Cosinussatz

Nun wollen wir an einem Beispiel demonstrieren, wie man den Cosinussatz einsetzt. Gegeben sei das folgende Dreieck, in dem die Seite c unbekannt ist:



$a = 3.0$ cm
$b = 3.6$ cm
$\gamma = 60°$
$c = ?$

Zur Lösung benutzen wir den Cosinussatz:

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein:

$$c^2 = (3\text{cm})^2 + (3.6\text{cm})^2 - 2 \cdot 3\text{cm} \cdot 3.6\text{cm} \cdot \cos 60°$$

$$c^2 = 21.96\text{cm}^2 - 21.6\text{cm}^2 \cdot 0.5$$

$$c = \sqrt{11.16\text{cm}^2} = \underline{\underline{3.4\text{cm}}}$$

Ergebnis: Die gesuchte Seite c hat eine Länge von 3.4cm.

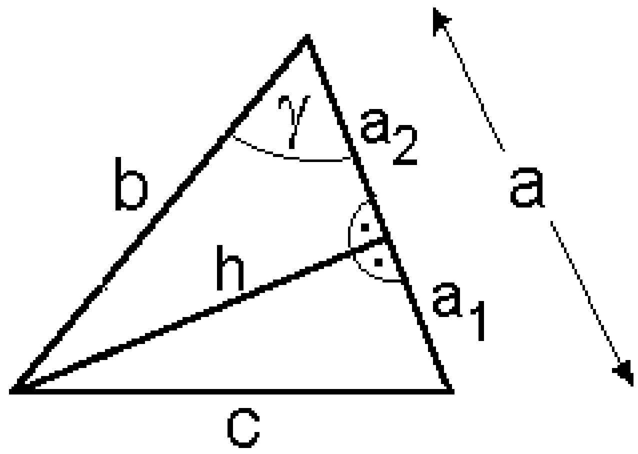
Trigonometrie V

ZURÜCK

Beweis des Cosinussatz

■ Beweisidee

Der Cosinussatz lautete $c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$



❶ Wir zeichnen die Höhe h der Seite a ein.
❷ Dadurch können wir c durch h und a_1 ausdrücken.
❸ Wir versuchen h und a_1 durch die gegebenen Seiten a und b sowie den gegebenen Winkel γ zu ersetzen.
❹ Wir setzen die Ergebnisse von Punkt ❸ in Punkt ❷ ein.

■ Details zum Beweis

zu ❷ Im unteren rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras: $c^2 = h^2 + a_1^2$

zu ❸ Nun müssen wir in $c^2 = h^2 + a_1^2$ die Seiten h und a_1 durch die Seiten a und b und den Winkel γ ersetzen. Zuerst ersetzen wir h:

$$h = \sin\gamma\cdot b$$

Als zweites ersetzen wir a_1:

$$a_1 = a - a_2$$

$$a_1 = a - (\cos\gamma\cdot b) \qquad \text{weil: } \cos\gamma = a_2:b)$$

zu ❹ Schritt 4 besteht nur aus technischen Umformungen:
Wir setzen die Ergebnisse aus 3 in die Formel aus Punkt 2 ein und multiplizieren die Klammern aus:

$$c^2 = (\sin\gamma\cdot b)^2 + (a - \cos\gamma\cdot b)^2$$
$$c^2 = \sin^2\gamma\cdot b^2 + a^2 -2\cdot a\cdot\cos\gamma\cdot b + \cos^2\gamma\cdot b^2$$

Aus dem 1. und 4. Summanden können wir b^2 ausklammern:

$$c^2 = b^2(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma) + a^2 -2\cdot a\cdot\cos\gamma\cdot b$$

Die Klammer fällt weg (trigonometrischer Pythagoras).
Diese letzte Umformung ergab den Cosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 -2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$$

Version: Test

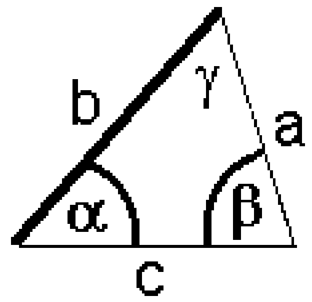
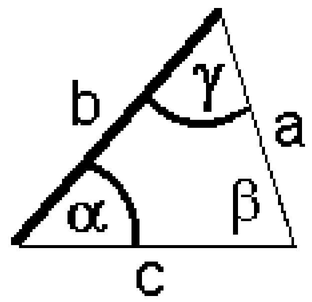
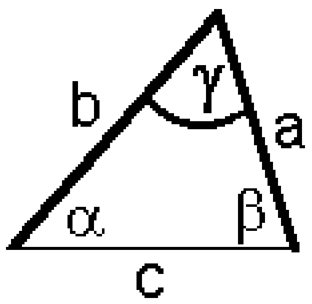
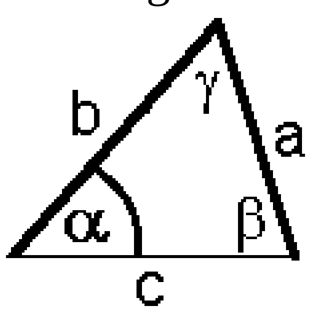
Trigonometrie V

ZURÜCK

Aufgabentypen

■ Tabelle

Wenn man den Sinus- und den Cosinussatz kennt, kann man jedes beliebige Dreieck berechnen! In der Tabelle unten ist angegeben, zu welcher Aufgabenstellung man welchen Satz benutzen muß. Meist muß man sogar mehrere Sätze benutzen. Die gegebenen Seiten bzw. Winkel sind dick gezeichnet:

Gegeben:	**?**	**Lösungsweg:**
Eine Seite (b), der gegenüberliegende Winkel (β) und ein anliegender Winkel (α): 	a	❶ Sinussatz
	c	❶ Winkelsummensatz ❷ Sinussatz
	γ	❶Winkelsummensatz
Eine Seite (b) und die beiden anliegenden Winkel (α und γ): 	a	❶ Winkelsummensatz ❷ Sinussatz
	c	❶ Winkelsummensatz ❷ Sinussatz
	γ	❸ Winkelsummensatz
Zwei Seiten (a,b) und der eingeschlossene Winkel: 	c	❶ Cosinussatz
	α	❶ Cosinussatz ❷ Sinussatz
	β	❶ Cosinussatz ❷ Sinussatz
Ein Winkel, die gegen-überliegende Seite, eine anliegende Seite: 	c	❶ Sinussatz (β berechnen) ❷ Winkelsummensatz (γ berechnen) ❸ Sinussatz (c berechnen)
	β	❶ Sinussatz
	γ	❶ Sinussatz (β berechnen) ❷ Winkelsummensatz